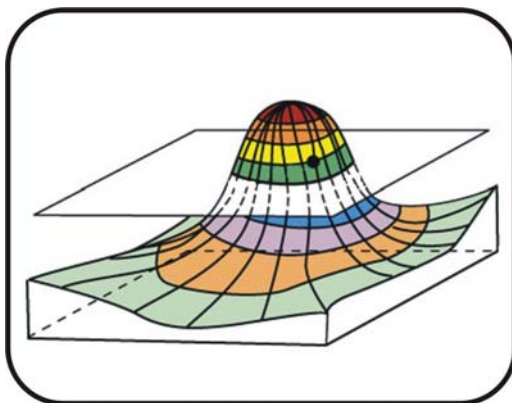


# ELEKTŘINA A MAGNETIZMUS

## III. Elektrický potenciál



### Obsah

<b>3</b>	<b>ELEKTRICKÝ POTENCIÁL</b>	<b>2</b>
3.1	POTENCIÁL A POTENCIÁLNÍ ENERGIE	2
3.2	ELEKTRICKÝ POTENCIÁL V HOMOGENNÍM POLI.	4
3.3	ELEKTRICKÝ POTENCIÁL ZPŮSOBENÝ BODOVÝMI NÁBOJI	5
3.3.1	POTENCIÁLNÍ ENERGIE V SOUSTAVĚ NÁBOJŮ	6
3.4	SPOJITÉ ROZLOŽENÍ NÁBOJE	8
3.5	ODVOZENÍ ELEKTRICKÉHO POLE Z ELEKTRICKÉHO POTENCIÁLU	8
3.5.1	GRADIENT A EKVIPOTENCIÁLY	9
3.6	SHRNUTÍ	15
3.7	ALGORITMUS VÝPOČTU ELEKTRICKÉHO POTENCIÁLU	16
3.8	ŘEŠENÉ ÚLOHY	18
3.9	TÉMATICKÉ OTÁZKY	22
3.10	NEŘEŠENÉ ÚLOHY	22

### 3 Elektrický potenciál

#### 3.1 Potenciál a potenciální energie

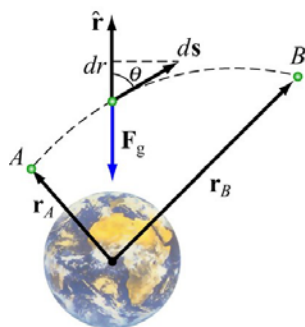
Z klasické mechaniky je známo, že přitažlivá síla, která působí na částici o hmotnosti  $m$  ve vzdálenosti  $r$  od středu Země, je nepřímo úměrná čtverci této vzdálenosti podle vztahu

$$\mathbf{F}_g = -G \frac{mM}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (3.1.1)$$

kde  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$  je gravitační konstanta a  $\hat{\mathbf{r}}$  je jednotkový vektor směřující radiálně vnějším směrem. Země je zde chápána jako homogenní koule o hmotnosti  $M$ . Odpovídající gravitační pole, které je definováno jako gravitační síla působící na jednotku hmotnosti, je vyjádřeno vztahem

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}_g}{m} = -\frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (3.1.2)$$

Povšimněte si, že  $\mathbf{g}$  závisí výhradně na  $M$ , hmotnosti vytvářející pole, a  $r$ , vzdálenosti od  $M$ .



Obr. 3.1.1.

Uvažujme pohyb částice o hmotnosti  $m$  vlivem gravitace (viz obrázek 3.1.1). Práce vykonaná gravitací při pohybu  $m$  z místa  $A$  do místa  $B$  je

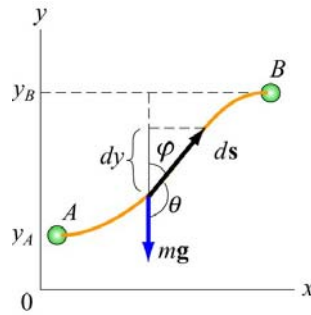
$$W_g = \int \mathbf{F}_g \cdot d\mathbf{s} = \int_{r_A}^{r_B} \left( -\frac{GmM}{r^2} \right) dr = \left[ \frac{GmM}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = GmM \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right). \quad (3.1.3)$$

Výsledek  $W_g$  nezávisí na délce dráhy, kterou částice urazila, ale výhradně na poloze koncových bodů  $A$  a  $B$ . Důležitý je rozdíl mezi prací vykonanou polem  $W_g$  a prací vykonanou vnějšími silami  $W_{\text{ext}}$ , například Vámi. Oba výrazy se liší opačným znaménkem,  $W_g = -W_{\text{ext}}$ .

V blízkosti zemského povrchu je gravitační pole  $\mathbf{g}$  přibližně konstantní o velikosti  $g = GM/r_E^2 \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ , kde  $r_E$  je poloměr Země. Práce vykonaná přitažlivostí při pohybu objektu z výšky  $y_A$  do výšky  $y_B$  (viz obrázek 3.1.2) je

$$W_g = \int_A^B \mathbf{F}_g \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B mg \cos \theta ds = - \int_A^B mg \cos \varphi ds = - \int_{y_A}^{y_B} mg dy = -mg(y_B - y_A). \quad (3.1.4)$$

Výsledek opět nezávisí na celkové dráze, je funkcí výhradně změny svislé výšky  $y_B - y_A$ .



Obr. 3.1.2: Pohyb objektu o hmotnosti  $m$  z  $A$  do  $B$ .

Z výše uvedeného příkladu je zřejmé, že pokud se bude objekt pohybovat po uzavřené křivce, a vrátí se znovu do místa, kde pohyb započal, výsledná práce vykonaná polem bude nulová. Říkáme, že přitažlivá síla je konzervativní (zachovává se). Obecněji: síla  $\mathbf{F}$  je konzervativní, pokud je její dráhový integrál po uzavřené křivce nulový:

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad (3.1.5)$$

Výklad konzervativní síly bývá často spojen s úvodem do koncepce potenciální energie  $U$ . Změna potenciální energie přiřazená konzervativní síle působící na objekt, který se pohybuje z bodu  $A$  do bodu  $B$ , je definována jako

$$\Delta U = U_B - U_A = -\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\Delta W, \quad (3.1.6)$$

kde  $W$  je práce vykonaná silou na objektu. V případě gravitace, kde  $W = W_g$ , a ze vztahu (3.1.3), je možné psát potenciální energii takto:

$$U_g = -\frac{GmM}{r} + U_0, \quad (3.1.7)$$

kde  $U_0$  je konstanta závislá na vztažném (referenčním) bodě. Referenční bod je výhodné zavést tak, aby konstanta  $U_0$  byla nulová. V případě gravitace můžeme vztažný bod zvolit v nekonečnu a pak  $U_0(r = \infty) = 0$ . Jelikož  $U_g$  závisí na volbě vztažného bodu, fyzikální význam má pouze rozdíl potenciálních energií  $U_g$ . V blízkosti zemského povrchu, kde je gravitační pole  $\mathbf{g}$  přibližně konstantní, mění předměty svoji potenciální energii v závislosti na změně výšky  $h$  podle vztahu  $U_g = +mgh$  a práce vykonaná gravitací je rovna  $W_g = -mgh$ .

Další pojem, který souvisí s potenciální energií je „potenciál“. Z  $\Delta U$  získáme gravitační potenciál jako

$$\Delta V_g = \frac{\Delta U_g}{m} = -\int_A^B (\mathbf{F}_g/m) \cdot d\mathbf{s} = -\int_A^B \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s}. \quad (3.1.8)$$

Fyzikálně znamená  $V_g$  zápornou práci vykonanou na jednotce hmotnosti gravitací při přemístění částice z bodu  $A$  do bodu  $B$ .

Náš popis elektrostatických dějů je značně podobný gravitaci. Elektrostatická síla  $\mathbf{F}_e$ , získaná z Coulombova zákona, je také nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti nabitých objektů a je také konzervativní. Zavedení elektrického pole  $\mathbf{E}$  je analogické poli gravitačnímu  $\mathbf{g}$ . Rozdíl elektrických potenciálů mezi dvěma body  $A$  a  $B$  definujeme také obdobně:

$$\Delta V = -\int_A^B (\mathbf{F}_e/q_0) \cdot d\mathbf{s} = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (3.1.9)$$

kde  $q_0$  je zkušební náboj. Rozdíl potenciálů  $\Delta V$  je roven práci vykonané na jednotkovém zkušební náboji  $q_0$  při změně jeho polohy z  $A$  do  $B$ , za předpokladu, že při tom nezmění svoji kinetickou energii. Znovu je potřeba zdůraznit, že elektrický potenciál nesmí být zaměněn za elektrickou potenciální energii. Tyto dvě veličiny jsou k sobě vztaženy takto:

$$\Delta U = q_0 \Delta V. \quad (3.1.10)$$

Jednotkou elektrického potenciálu v soustavě SI je volt (V):

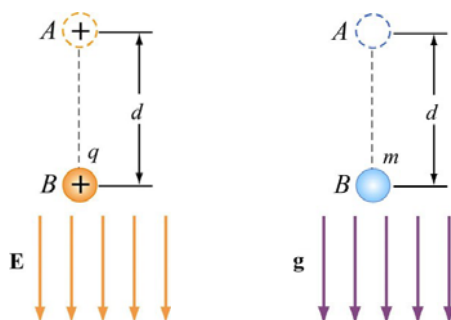
$$1 \text{ volt} = 1 \text{ joule/coulomb} \quad (1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}) \quad (3.1.11)$$

Pracujeme-li se systémy v měřítku atomů nebo molekul, je joule (J) příliš velkou jednotkou. Mnohem častěji se proto zde užívá elektronvolt (eV), který je definován jako energie získaná (nebo pozbytá) pohybujícím se elektronem při průchodu rozdílem potenciálů o velikosti jednoho voltu:

$$1 \text{ eV} = (1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(1 \text{ V}) = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}. \quad (3.1.12)$$

### 3.2 Elektrický potenciál v homogenním poli.

Uvažujme náboj  $+q$  pohybující se po přímce v homogenním elektrickém poli  $\mathbf{E} = E_0(-\hat{\mathbf{j}})$ , jak je ukázáno na obrázku 3.2.1 nalevo.



**Obr. 3.2.1.:** Nalevo – náboj  $q$  se pohybuje po přímé dráze v homogenním elektrickém poli  $\mathbf{E}$ . Napravo – těleso hmotnosti  $m$  se pohybuje po přímé dráze v homogenním gravitačním poli  $\mathbf{g}$

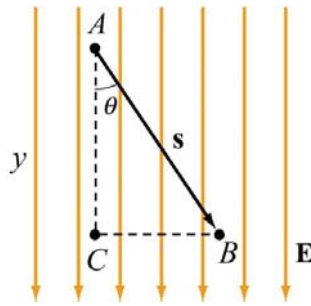
Jelikož je dráha rovnoběžná s  $\mathbf{E}$ , lze rozdíl potenciálů mezi body  $A$  a  $B$  vypočítat takto:

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -E_0 \int_A^B ds = -E_0 d < 0. \quad (3.2.1)$$

Je zřejmé, že bod  $B$  má nižší potenciál než bod  $A$ . Ve skutečnosti směřují siločivky elektrického pole vždy od vyššího potenciálu k nižšímu. Změna potenciální energie je  $\Delta U = U_B - U_A = -qE_0 d$ . Pokud je náboj kladný, je výsledný rozdíl potenciální energie záporný, z čehož vyplývá, že při pohybu kladného náboje ve směru pole se jeho potenciální energie snižuje. To také odpovídá gravitační analogii zobrazené na 3.2.1 napravo, kde těleso o hmotnosti  $m$  při pádu ve směru pole  $\mathbf{g}$  ztrácí svoji potenciální energii ( $\Delta U = -mgd$ ).

Co se stane, když dráha z bodu  $A$  do  $B$  není rovnoběžná s  $\mathbf{E}$ , ale je skloněna o úhel  $\theta$ , jak je nakresleno na obrázku 3.2.2? V takovém případě vypočteme potenciálový rozdíl podle vztahu

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{s} = -E_0 s \cos \theta = -E_0 y. \quad (3.2.2)$$



**Obr. 3.2.2:** Potenciálový rozdíl způsobený homogenním elektrickým polem

Povšimněme si, že na obrázku 3.2.2 směřuje osa  $y$  dolů. Opět vidíme, že pohyb ve směru pole  $\mathbf{E}$  snižuje elektrický potenciál. Co se bude dít s potenciálem, pokud postupně projdeme dráhu  $A \rightarrow C \rightarrow B$ ? V tom případě se bude potenciálový rozdíl skládat ze dvou složek, každý pro jeden úsek dráhy:

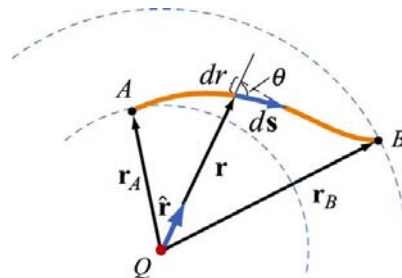
$$\Delta V = \Delta V_{CA} + \Delta V_{BC}. \quad (3.2.3)$$

Při pohybu z  $A$  do  $C$  bude změna potenciálu  $\Delta V_{CA} = -E_0 y$ . Následně, při dráze z  $C$  do  $B$ , bude potenciálový rozdíl nulový ( $\Delta V_{CB} = 0$ ), protože tato část dráhy je kolmá na směr pole  $\mathbf{E}$ . Stejný výsledek získáme, pokud tuto část dráhy vypustíme. Můžeme to učinit jen díky tomu, že pole  $\mathbf{E}$  je konzervativní.

Povšimněte si, že po dráze  $A \rightarrow C \rightarrow B$  je práce konána jen podél části dráhy  $AC$ , která je rovnoběžná se směrem pole. V bodech  $B$  a  $C$  je elektrický potenciál shodný ( $V_B = V_C$ ). Ze vztahu  $\Delta U = q\Delta V$  vyplývá, že k pohybu náboje z  $C$  do  $B$  není zapotřebí žádné práce. Všechny body podél dráhy spojující  $C$  s  $B$  jsou na téže „ekvipotenciální linii“. Podrobnější budou ekvipotenciály probírány v kapitole 3.5.

### 3.3 Elektrický potenciál způsobený bodovými náboji

Vypočteme rozdíl potenciálu mezi dvěma body  $A$  a  $B$  způsobený nábojem  $+Q$ . Elektrické pole vytvořené nábojem  $Q$  je  $\mathbf{E} = (Q/4\pi\epsilon_0 r^2)\hat{\mathbf{r}}$ , kde  $\hat{\mathbf{r}}$  je jednotkový vektor mířící do bodu, kde sledujeme pole.



**Obr. 3.3.1:** Rozdíl potenciálů mezi dvěma body vytvořený bodovým nábojem  $Q$ .

Podle obrázku 3.3.1, ze kterého je zřejmé, že  $\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{s} = ds \cos \theta = dr$ , dostaneme

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{s} = -\int_A^B \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right). \quad (3.3.1)$$

Znovu je nutno zdůraznit, že rozdíl potenciálů je závislý výhradně na koncových bodech dráhy, nezávisí na dráze, která je spojuje.

Stejně jako v případě gravitace, je fyzikálně smysluplný jen rozdíl elektrického potenciálu. Můžeme vybrat jeden referenční bod a v něm zvolit nulový potenciál. Z praktických důvodů je často výhodné uvažovat referenční bod v nekonečnu, pak elektrický potenciál v bodě  $P$  vypočteme jako

$$V_P = - \int_{\infty}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (3.3.2)$$

Podle tohoto vztahu je elektrický potenciál ve vzdálenosti  $r$  od bodového náboje  $Q$  roven

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}. \quad (3.3.3)$$

Pokud je přítomno více bodových nábojů, lze při využití principu superpozice a získat celkový elektrický potenciál jako součet potenciálů jednotlivých bodových nábojů:

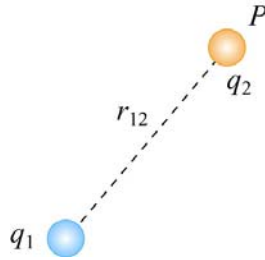
$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \frac{q_k}{r_k} = k_e \sum_k \frac{q_k}{r_k}. \quad (3.3.4)$$

V tabulce uvádíme souhrnné porovnání gravitace a elektrostatiky:

Gravitace	Elektrostatika
hmotnost $m$	náboj $q$
gravitační síla $\mathbf{F}_g = -G \frac{mM}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$	Coulombova síla $\mathbf{F}_e = k_e \frac{qQ}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$
gravitační pole $\mathbf{g} = \mathbf{F}_g/m$	elektrické pole $\mathbf{E} = \mathbf{F}_e/q$
rozdíl potenciální energie $\Delta U = -\int_A^B \mathbf{F}_g \cdot d\mathbf{s}$	rozdíl potenciální energie $\Delta U = -\int_A^B \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{s}$
gravitační potenciál $V_g = -\int_A^B \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s}$	elektrický potenciál $V_e = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$
potenciál zdroje $M$ : $V_g = -\frac{GM}{r}$	potenciál zdroje $Q$ : $V_e = k_e \frac{Q}{r}$
$ \Delta U_g  = mgd$ (konstantní $\mathbf{g}$ )	$ \Delta U_e  = qEd$ (konstantní $\mathbf{E}$ )

### 3.3.1 Potenciální energie v soustavě nábojů

Pokud je soustava uspořádána do určité konfigurace vnějšími činiteli, pak platí vztah  $\Delta U = -W = +W_{\text{ext}}$ . Změna potenciální energie soustavy bude rovna práci, kterou je nutno vynaložit vnějšími činiteli na vytvoření dané konfigurace nábojů. Jednoduchým příkladem je vyzdvižení tělesa o hmotnosti  $m$  do výšky  $h$ . Práce vykonaná vnějším činitelem (například Vámi) je  $+mgh$  (gravitační pole vykonalo práci  $-mgh$ ). Představme si, že přemístíme náboje z nekonečna tak, aby na konci pohybu byly v klidu. Začneme se dvěma náboji  $q_1$  a  $q_2$ . Potenciál jimi vytvořený v bodě  $P$  bude  $V_1$  (viz obrázek 3.3.2).

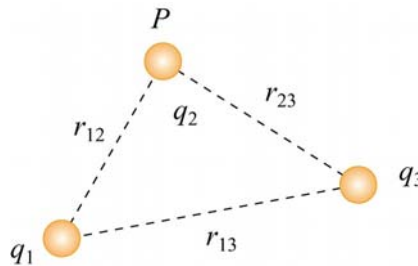


**Obr. 3.3.2:** Dvojice bodových nábojů ve vzdálenosti  $r_{12}$ .

Práce  $W_2$  vykonaná vnějším vlivem při přemístění druhého náboje  $q_2$  z nekonečna do bodu  $P$  je  $W_2 = q_2 V_1$ . (K přemístění prvního náboje nebyla spotřebována žádná práce,  $W_1 = 0$ ). Jelikož  $V_1 = q_1/4\pi\epsilon_0 r_{12}$ , kde  $r_{12}$  je vzdálenost měřená od  $q_1$  do  $P$ , dostáváme:

$$U_{12} = W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \quad (3.3.5)$$

Pokud jsou náboje  $q_1$  a  $q_2$  souhlasně nabitě, bude nutno vynaložit kladnou práci na překonání elektrostatického odpuzování a potenciální energie soustavy bude kladná,  $U_{12} > 0$ . V opačném případě, pokud mají náboje nesouhlasné znaménko, je  $U_{12} < 0$  z důvodu přitahování mezi náboji.



**Obr. 3.3.3:** Soustava trojice bodových nábojů.

K připojení třetího náboje  $q_3$  do soustavy bude zapotřebí vynaložit práci

$$W_3 = q_3(V_1 + V_2) = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right). \quad (3.3.6)$$

Potenciální energie výsledného seskupení bude

$$U = W_2 + W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right) = U_{12} + U_{13} + U_{23}. \quad (3.3.7)$$

Rovnice ukazuje, že celková potenciální energie je součtem příspěvků jednotlivých dvojic nábojů. Snadno provedeme zobecnění pro soustavu o  $N$  nábojích:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}}, \quad (3.3.8)$$

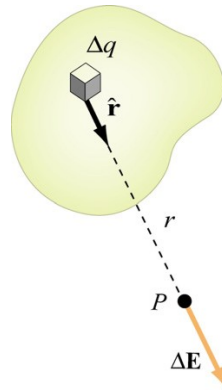
kde podmínka  $j > i$  vylučuje dvojí započítání téhož páru. Druhou možností je započítat každý pár dvakrát a výsledek vydělit dvěma:

$$U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_j}{r_{ij}} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(r_i), \quad (3.3.9)$$

kde výraz v závorce, neboli  $V(r_i)$ , je potenciál v místě  $\mathbf{r}_i$  (zde je náboj  $q_i$ ) vytvořený všemi ostatními náboji.

### 3.4 Spojité rozložení náboje

Pokud je náboj rozložený spojitě, lze potenciál v bodě  $P$  nalézt sčítáním příspěvků jednotlivých diferenciálních elementů náboje  $dq$ .



Obr. 3.4.1: Spojité rozložení náboje

Uvažujme rozložení náboje ukázané na obrázku 3.4.1. Máme-li referenční bod s nulovým potenciálem v nekonečnu, elektrický potenciál vytvořený nábojem  $dq$  v bodě  $P$  je

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}. \quad (3.4.1)$$

Sečtením příspěvků všech diferenciálních elementů dostaneme

$$\boxed{dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}}. \quad (3.4.2)$$

### 3.5 Odvození elektrického pole z elektrického potenciálu

V rovnici (3.1.9) jsme zavedli vztah mezi  $\mathbf{E}$  a  $V$ . Uvažujeme-li dvojici bodů, které jsou od sebe vzdáleny malou vzdáleností  $ds$ , bude výsledný diferenciální vztah

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (3.5.1)$$

V kartézských souřadnicích je  $\mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{i}} + E_y \hat{\mathbf{j}} + E_z \hat{\mathbf{k}}$ ,  $d\mathbf{s} = s_x \hat{\mathbf{i}} + s_y \hat{\mathbf{j}} + s_z \hat{\mathbf{k}}$  a vztah (3.5.1) přejde na

$$dV = -E_x dx - E_y dy - E_z dz, \quad (3.5.2)$$

odkud máme

$$\boxed{E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}}. \quad (3.5.3)$$



Zavedme diferenciální veličinu, která se nazývá „gradient“ neboli operátor „nabla“:

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}}. \quad (3.5.4)$$

Elektrické pole je možno za pomoci gradientu napsat ve tvaru

$$\mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{i}} + E_y \hat{\mathbf{j}} + E_z \hat{\mathbf{k}} = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} = -\left( \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \right) V = -\nabla V, \\ \mathbf{E} = -\nabla V. \quad (3.5.5)$$

Všimněme si, že gradient působí na skalár (elektrický potenciál) a výsledkem je vektor (elektrické pole). Matematicky je elektrické pole  $\mathbf{E}$  záporně vzatým gradientem elektrického potenciálu  $V$ . Fyzikálně záporné znaménko znamená úbytek, tedy elektrické pole míří ve směru úbytku potenciálu  $V$ .

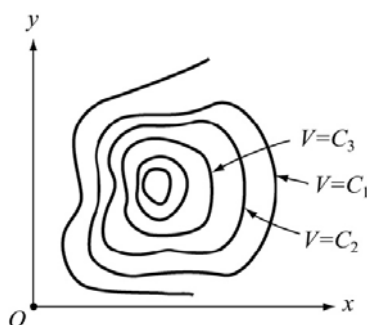
Pokud je náboj rozložen sféricky symetricky, pak je výsledné elektrické pole funkcí radiální vzdálenosti  $r$ , tedy  $\mathbf{E} = E_r \hat{\mathbf{r}}$ . V tomto případě je  $dV = -E_r dr$ . Pokud je potenciál  $V(r)$  znám, získáme  $\mathbf{E}$  jako

$$\mathbf{E} = E_r \hat{\mathbf{r}} = -\left( \frac{dV}{dr} \right) \hat{\mathbf{r}}. \quad (3.5.6)$$

Například elektrický potenciál vytvořený bodovým nábojem  $q$  je  $V(r) = q/4\pi\epsilon_0 r$ . Užitím předchozího vztahu určíme jednoduše elektrické pole  $\mathbf{E} = (q/4\pi\epsilon_0 r^2) \hat{\mathbf{r}}$ .

### 3.5.1 Gradient a ekvipotenciály

Předpokládejme dvourozměrný systém s elektrickým potenciálem  $V(x, y)$ . Křivky určené konstantní hodnotou  $V(x, y)$  nazýváme ekvipotenciálními liniemi. Příklad ekvipotenciálních linií je na obrázku 3.5.1.



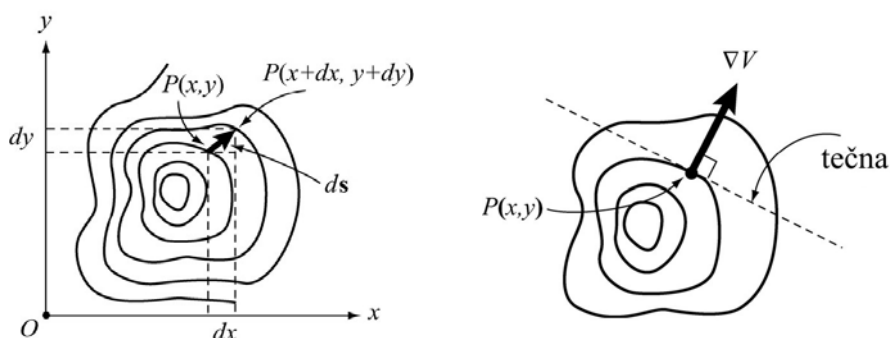
Obr. 3.5.1: Ekvipotenciální linie.

Ve třech rozměrech máme ekvipotenciální povrchy (plochy), které jsou definovány vztahem  $V(x, y, z) = \text{konst}$ . Ze vztahu  $\mathbf{E} = -\nabla V$  můžeme dokázat, že směr  $\mathbf{E}$  je vždy kolmý na ekvipotenciály v každém jejich bodě. Následuje důkaz pro dvourozměrný prostor. Zobecnění pro třírozměrný případ je zřejmé.

#### Důkaz:

Podle obrázku 3.5.2, necht' potenciál v bodě  $P(x, y)$  je  $V(x, y)$ . Nakolik se  $V$  změní v sousedním bodě  $P(x+dx, y+dy)$ ? Rozdíl zapíšeme jako

$$dV = V(x + dx, y + dy, z + dz) - V(x, y, z) = \left( V(x, y) + \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \dots \right) - V(x, y) \approx \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy. \quad (3.5.7)$$



**Obr. 3.5.2:** Změna  $V$  při přemístění z jedné ekvipotenciální linie na druhou.

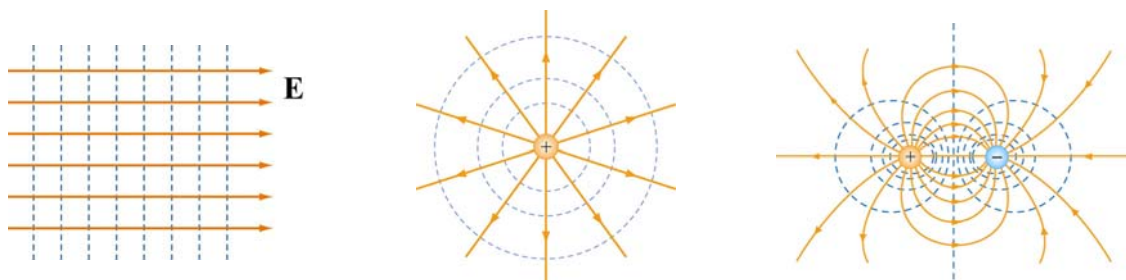
Za pomoci vektoru přemístění  $d\mathbf{s} = dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}}$  přepíšeme  $dV$  jako

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} \right) \cdot (dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}}) = (\nabla V) \cdot d\mathbf{s} = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (3.5.8)$$

Proběhne-li přesun  $d\mathbf{s}$  ve směru tečny k ekvipotenciále procházející bodem  $P(x, y)$ , pak je  $dV = 0$ , protože  $V$  je všude na této linii konstantní. Z toho vyplývá, že  $\mathbf{E}$  je kolmé na  $d\mathbf{s}$  podél celé ekvipotenciální linie. Tedy  $\mathbf{E}$  je kolmé k ekvipotenciále. Na obrázku 3.5.3 je zobrazeno několik příkladů ekvipotenciálních linií. Ve třech rozměrech by ekvipotenciální povrchy měly tytéž vlastnosti. Z rovnice (3.5.8) je také zřejmé, že změna potenciálu  $dV$  je maximální ve směru gradientu  $\nabla V$ :

$$\max\left(\frac{dV}{ds}\right) = |\nabla V|. \quad (3.5.9)$$

Fyzikálně to znamená, že gradient  $\nabla V$  vždy míří ve směru maximální změny funkce  $V$ .

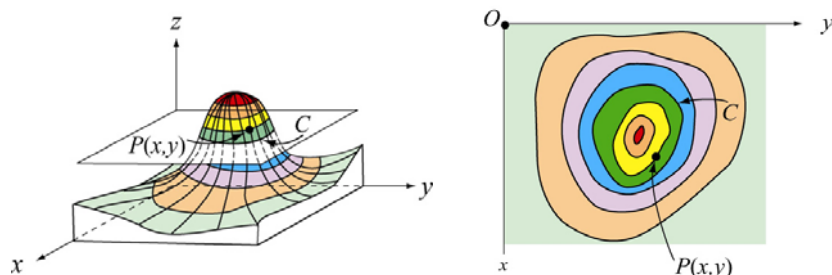


**Obr. 3.5.3:** Ekvipotenciální linie a elektrické silokřivky. *Nalevo* – homogenní pole  $\mathbf{E}$ , *uprostřed* – bodový náboj, *napravo* – elektrický dipól.

Vlastnosti ekvipotenciálních ploch lze shrnout následovně:

- i) Silokřivky jsou kolmé k ekvipotenciálám a směřují od vyšších k nižším potenciálům.
- ii) Ekvipotenciální plochy vytvářené bodovými náboji mají tvar soustředných kulových ploch. Pokud je zdrojem konstantní pole, mají tvar rovin kolmých na silokřivky.
- iii) Tečná složka pole podél ekvipotenciálního povrchu je nulová, ve všech ostatních případech je nutno pro přemístění náboje po povrchu vykonat nenulovou práci.
- iv) Pohybem náboje po ekvipotenciální ploše se nevykonává žádná práce.

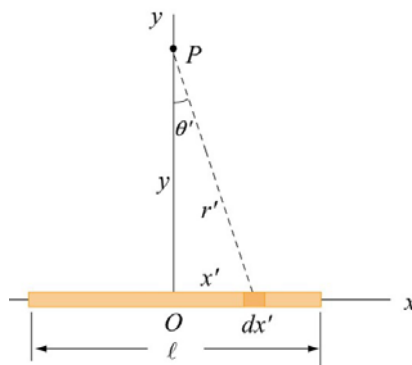
Pro ekvipotenciální plochy je užitečná podobnost s topografickou mapou (Obrázek 3.5.4). Každá vrstevnice na mapě znázorňuje stejnou výšku nad mořem. Matematicky vyjádřeno,  $z = f(x, y) = \text{konst.}$  Gravitační potenciál při povrchu Země je  $V_g = gz$  a proto zobrazené křivky odpovídají gravitačním ekvipotenciálám.



Obr. 3.5.4: Topografická mapa.

### Příklad 3.1: Rovnoměrně nabitá tyč

Mějme nevodivou tyč délky  $\ell$  mající rovnoměrně rozloženou hustotu náboje  $\lambda$ . Najděte elektrický potenciál v místě  $P$ , které leží v kolmé vzdálenosti  $y$  nad středem tyče.



Obr. 3.5.5: Nevodivá tyč délky  $\ell$  s rovnoměrně rozloženou hustotou náboje.

### Řešení:

Uvažujme diferenciální element délky  $dx'$ , který je nositelem náboje  $dq = \lambda dx'$ , jak je nakresleno na obrázku 3.5.5. Poloha tohoto elementárního zdroje je  $(x', 0)$ , přičemž bod  $P$ , ve kterém sledujeme pole je umístěn na ose  $y$  a má souřadnice  $(0, y)$ . Vzdálenost mezi  $dx'$  a  $P$  je  $r = (x'^2 + y^2)^{1/2}$ . Příspěvek uvažovaného elementu k potenciálu je dán jako

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx'}{(x'^2 + y^2)^{1/2}}.$$

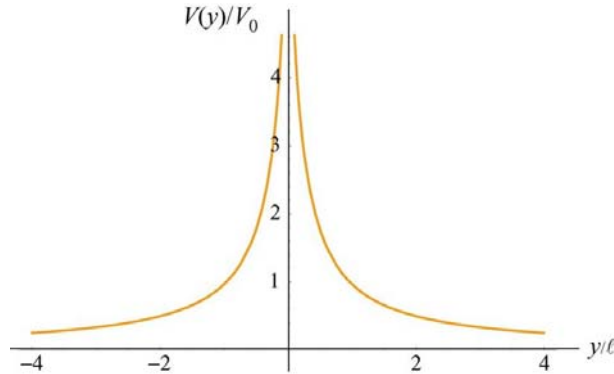
Potenciál  $V$  je v nekonečnu nulový, celkový potenciál vytvořený tyčí je tedy

$$\begin{aligned} V &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{dx'}{(x'^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \ln \left( x' + \sqrt{x'^2 + y^2} \right) \right]_{-\ell/2}^{\ell/2} = \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{(\ell/2) + \sqrt{(\ell/2)^2 + y^2}}{-(-\ell/2) + \sqrt{(\ell/2)^2 + y^2}} \right], \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

kde jsme při integraci použili vztah

$$\int \frac{dx'}{\sqrt{x'^2 + y^2}} = \ln\left(x' + \sqrt{x'^2 + y^2}\right).$$

Vykreslení  $V(y)/V_0$ , kde  $V_0 = \lambda/4\pi\epsilon_0$  v závislosti na  $y/\ell$  je na obrázku 3.5.6:



**Obr. 3.5.6:** Elektrický potenciál podél osy procházející středem nevodivé tyče.

Odpovídající elektrické pole lze získat jako

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \frac{\ell/2}{\sqrt{(\ell/2)^2 + y^2}},$$

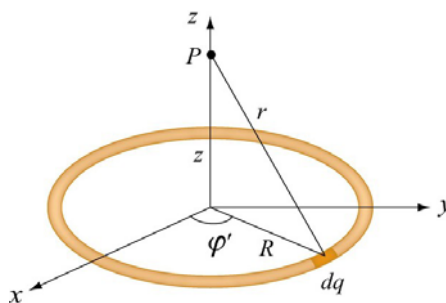
v souladu s výsledkem získaným z rovnice (2.10.9). V limitě  $\ell \gg y$  přechází odvozený potenciál na výrazně jednodušší tvar

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{(\ell/2) + \sqrt{(\ell/2)^2 + y^2}}{-(\ell/2) + \sqrt{(\ell/2)^2 + y^2}} \right] = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2y}{\ell}\right)^2}}{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2y}{\ell}\right)^2}} \right] \approx$$

$$\approx \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{2}{2y^2/\ell^2} \right) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{\ell^2}{y^2} \right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{\ell}{y} \right). \quad (3.5.11)$$

### **P** Příklad 3.2: Rovnoměrně nabitý prstenec

Uvažujme rovnoměrně nabitý prstenec o poloměru  $R$  a hustotě náboje  $\lambda$  (obrázek 3.5.7). Jaký je elektrický potenciál ve vzdálenosti  $z$  od středu prstence na středové ose?



**Obr. 3.5.7:** Nevodivý prstenec o poloměru  $R$  s rovnoměrnou hustotou náboje  $\lambda$ .

### Řešení:

Uvažujme malý diferenciální element  $d\ell = R d\varphi'$  na prstenci. Element je nositelem náboje  $dq = \lambda d\ell = \lambda R d\varphi'$  a jeho příspěvek k elektrickému potenciálu v místě  $P$  je

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\varphi'}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$$

Elektrický potenciál v místě  $P$  od celého prstence bude

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \oint d\varphi' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\lambda R}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{R^2 + z^2}}. \quad (3.5.12)$$

kde jsme provedli substituci  $Q = 2\pi R\lambda$  za celkový náboj prstence. Podle rovnice (3.5.12), můžeme složku  $E_z$  elektrického pole psát v souladu s rovnicí (2.10.14) jako

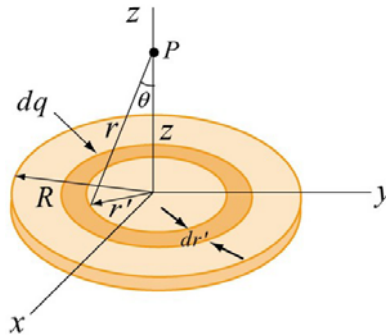
$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (3.5.13)$$

V limitě pro  $z \gg R$  se potenciál blíží potenciálu bodového náboje:

$$V \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z}.$$

### **P** Příklad 3.3: Rovnoměrně nabitý kotouč

Uvažujme rovnoměrně nabitý kotouč s poloměrem  $R$  a plošnou hustotou náboje  $\sigma$  ležící v rovině  $xy$ . Jaký je elektrický potenciál ve vzdálenosti  $z$  od středu kotouče na středové ose?



Obr. 3.4.3: Nevodivý kotouč o poloměru  $R$  a hustotě náboje  $\sigma$ .

### Řešení:

Uvažujme mezikruží o poloměru  $r'$  a šíři  $dr'$ . Náboj mezikruží je  $dq' = \sigma dA' = \sigma 2\pi r' dr'$ . Bod  $P$ , ve kterém sledujeme pole, je umístěn na ose  $z$  ve vzdálenosti  $z$  mimo rovinu kotouče. Podle obrázku je vzdálenost bodu  $P$  od mezikruží  $r = (r'^2 + z^2)^{1/2}$ . Z toho lze vypočítat příspěvek elektrického potenciálu v  $P$  jako

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 2\pi r' dr'}{\sqrt{r'^2 + z^2}}.$$

Sečtením všech mezikruží dostaneme pro potenciál celého kotouče

$$V = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{2\pi r' dr'}{\sqrt{r'^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right]. \quad (3.5.14)$$

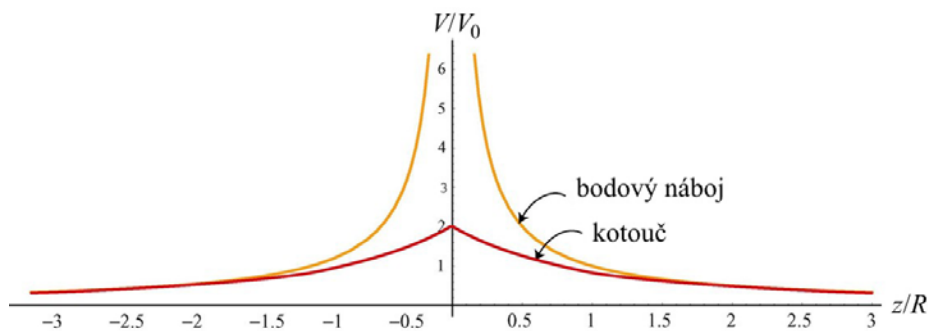
V limitě pro  $z \gg R$  máme

$$\sqrt{R^2 + z^2} = |z| \left( 1 + \frac{R^2}{z^2} \right)^{1/2} \approx |z| \left( 1 + \frac{R^2}{2z^2} + \dots \right),$$

a potenciál se limitně blíží bodovému náboji:

$$V \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{2|z|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma\pi R^2}{|z|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|z|}.$$

Podle očekávání je ve velké vzdálenosti potenciál nevodivého nabitého kotouče k nerozeznání od potenciálu bodového náboje  $Q$ . Srovnání potenciálu bodového náboje a kotouče je vykresleno na obrázku 3.4.4.



**Obr. 3.4.4:** Porovnání potenciálů nevodivého nabitého kotouče a bodového náboje. Elektrický potenciál je zde vyjádřen v jednotkách  $V_0 = Q/4\pi\epsilon_0 R$ .

Povšimněte si, že elektrický potenciál ve středu disku ( $z = 0$ ) je konečný a jeho hodnota je

$$V_C = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} = \frac{Q}{\pi R^2} \frac{R}{2\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{R} = 2V_0. \quad (3.5.15)$$

Potenciál ve středu představuje práci potřebnou k přenesení jednotkového náboje z nekonečna do středu kotouče.

Elektrické pole v bodě P dostaneme ze vztahu (3.5.14):

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right], \quad (3.5.16)$$

což je v souladu se vztahem (2.10.18). V limitním případě  $R \gg z$  přejde tato rovnice na vztah  $E_z = \sigma/2\epsilon_0$ , což je elektrické pole nekonečně velké nevodivé desky.

### **P** Příklad 3.3: Výpočet elektrického pole z elektrického potenciálu

Vyjděme z elektrického potenciálu vytvořeného určitým rozložením náboje, které lze v kartézských souřadnicích zapsat ve tvaru

$$V(x, y, z) = x^2 y^2 + Bxyz + C,$$

kde  $A, B$  a  $C$  jsou konstanty. Jaké je elektrické pole odpovídající tomuto potenciálu?

### Řešení:

Elektrické pole nalezneme pomocí vztahu (3.5.3):

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -2Axy^2 - Byz,$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -2Ax^2y - Bxz,$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -Bxy.$$

Hledané elektrické pole tedy je  $\mathbf{E} = -(2Axy^2 + Byz)\hat{\mathbf{i}} - (2Ax^2y + Bxz)\hat{\mathbf{j}} - Bxy\hat{\mathbf{k}}$ .

### 3.6 Shrnutí

- Síla  $\mathbf{F}$  je **konzervativní**, pokud je její integrál po uzavřené křivce nulový  $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$ .
- Změna potenciální energie odpovídající působení konzervativní síly  $\mathbf{F}$  na objekt pohybující se z  $A$  do  $B$  je  $\Delta U = U_B - U_A = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ .
- Rozdíl elektrického potenciálu  $\Delta V$  mezi body  $A$  a  $B$  v elektrickém poli  $\mathbf{E}$  je určen jako  $\Delta V = V_B - V_A = \Delta U/q_0 = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ . Jeho velikost odpovídá práci potřebné k přemístění jednotkového náboje  $q_0$  z bodu  $A$  do  $B$  beze změny kinetické energie.
- Elektrický potenciál vyvolaný bodovým nábojem  $Q$  je ve vzdálenosti  $r$  od náboje

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}.$$

Pro více nábojů lze využít princip superpozice a výsledný elektrický potenciál je pak

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \frac{Q_k}{r_k}.$$

- **Potenciální energie** přiřazená dvojici jednotlivých nábojů  $q_1$  a  $q_2$  vzdálených  $r_{12}$  je

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}.$$

- Z elektrického potenciálu  $V$  lze pomocí **gradientu** získat elektrické pole  $\mathbf{E} = -\nabla V$ . V kartézských souřadnicích lze jednotlivé složky zapsat takto:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

- Elektrický potenciál vytvořený spojitě rozloženým nábojem určíme ze vztahu

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}.$$

### 3.7 Algoritmus výpočtu elektrického potenciálu

V této kapitole ukážeme, jak lze vypočítat elektrický potenciál nejen pro diskrétní i spojitě rozložený náboje. Oproti elektrickému poli, které je vektorovou veličinou, je elektrický potenciál veličinou skalární. Pro diskrétní rozložení náboje využíváme princip superpozice a sčítáme jednotlivé příspěvky:

$$V(r) = k_e \sum_k \frac{q_k}{r_k}.$$

Pro spojitě rozložený náboje musíme určit hodnotu integrálu

$$V(r) = k_e \int \frac{dq}{r}.$$

Integraci provedeme v následujících krocích:

(1) Začneme výpočtem elementu potenciálu  $dV = k_e dq/r$

(2) Rozepíšeme element náboje  $dq$  jako

$$dq = \begin{cases} \lambda dl & \text{(délka)} \\ \sigma dA & \text{(plocha)} \\ \rho dV & \text{(objem)} \end{cases}$$

v závislosti na způsobu, zda je náboj rozložen lineárně, plošně nebo v prostoru.

(3) Substituujeeme  $dq$  do vztahu pro  $dV$ .

(4) Zvolíme vhodnou souřadnicovou soustavu a vyjádříme diferenciální element ( $dl$ ,  $dA$  nebo  $dV$ ) a  $r$  podle zvolené souřadnicové soustavy (viz tabulka 2.1).

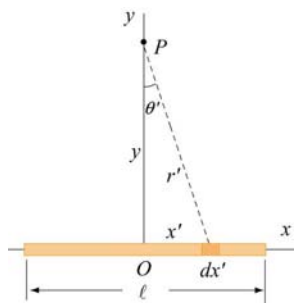
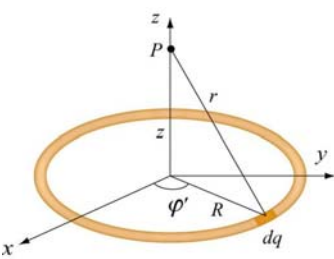
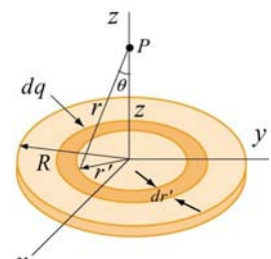
(5) Přepíšeme  $dV$  za pomoci integrační proměnné.

(6) Dokončíme integraci a obdržíme  $V$ .

První možností, jak pracovat s výsledkem získaným po integraci potenciálu  $V$  je výpočet elektrického pole ze vztahu  $\mathbf{E} = -\nabla V$ . Je-li náboj rozprostřen v konečné oblasti prostoru, lze obdržený výsledek ve velké vzdálenosti od nábojů porovnat s polem bodového náboje. Zvolíme-li bod  $P$  velmi daleko od nábojů, bude se pole chovat jako pole bodového náboje, které je nepřímo úměrné čtverci vzdálenosti  $r$  a potenciál bude nepřímo úměrný vzdálenosti  $r$ .



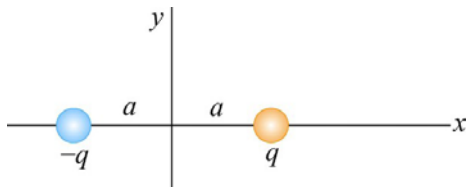
V tabulce níže je popsán postup aplikován na výpočet elektrického potenciálu náboje rozloženého rovnoměrně na tenké tyči, prstenci a kotouči.

	Nabitá tyč	Nabitý prstenec	Nabitý kotouč
1) obrázek			
2) vyjádření dq pomocí hustoty náboje	$dq = \lambda dx'$	$dq = \lambda dl$	$dq = \sigma dA$
3) substituce dq do vztahu pro dV	$dV = k_e \frac{\lambda dx'}{r}$	$dV = k_e \frac{\lambda dl}{r}$	$dV = k_e \frac{\sigma dA}{r}$
4) Přepis r a diferenciálního elementu do vhodných souřadnic	$dx'$ $r = \sqrt{x'^2 + y^2}$	$dl = R d\varphi'$ $r = \sqrt{R^2 + z^2}$	$dA = 2\pi r' dr'$ $r = \sqrt{r'^2 + z^2}$
5) přepis dV	$dV = \frac{k_e \lambda dx'}{\sqrt{x'^2 + y^2}}$	$dV = \frac{k_e \lambda R d\varphi'}{\sqrt{R^2 + z^2}}$	$dV = \frac{k_e 2\pi \sigma r' dr'}{\sqrt{r'^2 + z^2}}$
6) Integrace V	$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{\left(\frac{\ell}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + y^2}}{-\left(\frac{\ell}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + y^2}} \right]$	$V = k_e \frac{Q}{\sqrt{R^2 + z^2}}$	$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{R^2 + z^2} -  z  \right]$
7) výpočet E z potenciálu	$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \frac{\ell/2}{\sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + y^2}}$	$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$	$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \frac{z}{ z } - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right]$
8) limita bodového náboje pro E	$E_y \approx \frac{k_e Q}{y^2};$ $y \gg \ell$	$E_z \approx \frac{k_e Q}{z^2};$ $z \gg R$	$E_z \approx \frac{k_e Q}{z^2};$ $z \gg R$

## 3.8 Řešené úlohy

### **P 3.8.1:** Elektrický potenciál tvořený soustavou dvou nábojů

Uvažujme dvojici nábojů podle obrázku 3.8.1. Stanovte elektrický potenciál libovolného bodu na ose  $x$  a nalezený vztah vykreslete.



Obr. 3.8.1: Elektrický dipól.

#### Řešení:

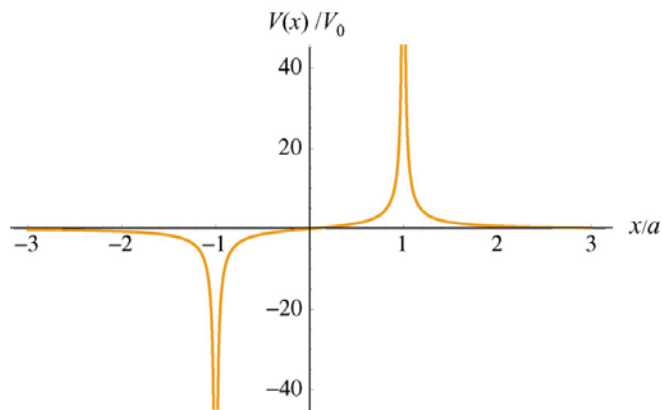
Elektrický potenciál lze najít za pomoci principu superpozice. V libovolném bodě na ose  $x$  platí

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|x-a|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q)}{|x+a|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{|x-a|} - \frac{1}{|x+a|} \right].$$

Tento výraz lze přepsat do bezrozměrného tvaru

$$\frac{V(x)}{V_0} = \frac{1}{\left| \frac{x}{a} - 1 \right|} - \frac{1}{\left| \frac{x}{a} + 1 \right|},$$

kde jsme označili  $V_0 = q/4\pi\epsilon_0 a$ . Vykreslení bezrozměrného elektrického potenciálu v závislosti na  $x/a$  je na obrázku 3.8.2.

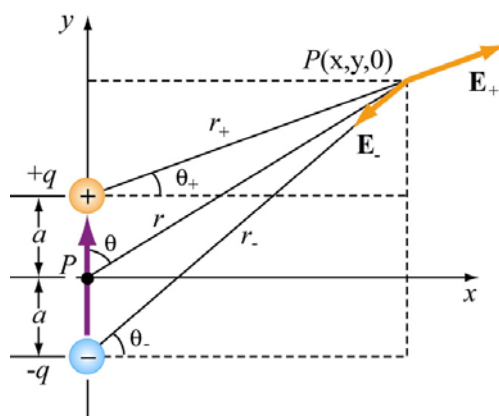


Obr. 3.8.2.

Z grafu je zřejmé, že  $V(x)$  diverguje v bodech  $x/a = \pm 1$ , kde jsou rozmístěny náboje.

### **P 3.8.2:** Elektrický potenciál dipólu

Uvažujme elektrický dipól umístěný v ose  $y$ , jak je ukázáno na obrázku 3.8.3. Nalezněte elektrický potenciál  $V$  v bodě  $P$  v rovině  $xy$ , a z něho vypočtěte elektrické pole dipólu.



Obr. 3.8.3.

Z principu superpozice je potenciál v místě  $P$  roven

$$V = \sum_k V_k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right),$$

kde  $r_{\pm}^2 = r^2 + a^2 \mp 2ra \cos \theta$ . V limitě  $r \gg a$  platí

$$\frac{1}{r_{\pm}} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \left( \frac{a}{r} \right)^2 \mp 2 \left( \frac{a}{r} \right) \cos \theta \right]^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{a}{r} \right)^2 \pm \left( \frac{a}{r} \right) \cos \theta + \dots \right]$$

a potenciál dipólu můžeme přibližně vyjádřit jako

$$\begin{aligned} V &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right] \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{a}{r} \right)^2 + \left( \frac{a}{r} \right) \cos \theta - 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{r} \right)^2 + \left( \frac{a}{r} \right) \cos \theta \right] = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{2a \cos \theta}{r} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \end{aligned}$$

kde  $\mathbf{p} = 2aq \hat{\mathbf{j}}$  je elektrický dipólový moment. Ve sférických souřadnicích je operátor gradientu roven

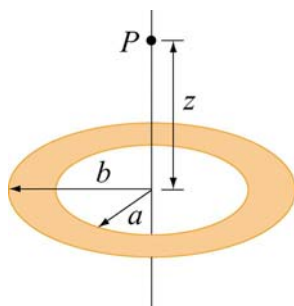
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\phi}}.$$

Vzhledem k tomu, že potenciál je funkcí jak  $r$ , tak  $\theta$ , bude mít elektrické pole složky ve směru  $\hat{\mathbf{r}}$  a  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ . Využitím  $\mathbf{E} = -\nabla V$  dostaneme

$$\boxed{E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E_{\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E_{\varphi} = 0.}$$

### **P 3.8.3: Elektrický potenciál anuloidu**

Mějme anuloid s rovnoměrně rozprostřenou hustotou náboje  $\sigma$ , jak je ukázáno na obrázku 3.8.4. Nalezněte elektrický potenciál v bodě  $P$  ležícím na ose symetrie.



Obr. 3.8.4: Anuloid s rovnoměrným rozložením náboje.

### Řešení:

Vybereme malý diferenciální element  $dA$  ve vzdálenosti  $r$  od bodu  $P$ . Množství náboje obsažené v  $dA$  je dáno vztahem

$$dq = \sigma dA = \sigma r' d\theta dr'.$$

Příspěvek tohoto elementu k celkovému potenciálu v bodě  $P$  je

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r' d\theta dr'}{\sqrt{r'^2 + z^2}}.$$

Integrováním přes celý anuloid dostaneme

$$V = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{r' dr' d\theta}{\sqrt{r'^2 + z^2}} = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{r' dr'}{\sqrt{r'^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{b^2 + z^2} - \sqrt{a^2 + z^2} \right],$$

kde jsme využili známého integrálu

$$\int \frac{s ds}{\sqrt{s^2 + z^2}} = \sqrt{s^2 + z^2}.$$

Povšimněte si, že v limitě  $a \rightarrow 0$  a  $b \rightarrow R$  pro potenciál dostaneme

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right],$$

což odpovídá výsledku získanému pro nevodivý kotouč o poloměru  $R$  uvedenému v rovnici (3.5.14).

### **P** 3.8.4: Náboj pohybující se v blízkosti nabitého vodiče

Tenká tyč je umístěna podél osy  $z$  od  $z = -d$  do  $z = +d$ . Tyč je nositelem kladného náboje  $Q$  rovnoměrně rozprostřeného po celé délce tyče  $2d$  s hustotou náboje  $\lambda = Q/2d$ .

- Vypočtete elektrický potenciál v bodě  $z > d$  podél osy  $z$ .
- Jak se mění potenciální energie, když se elektron pohybuje mezi  $z = 4d$  do  $z = 3d$ ?
- Pokud elektron začíná pohyb v bodě  $z = 4d$ , kde je v klidu, jaká bude jeho rychlost v bodě  $z = 3d$ ?

### Řešení:

- (a) Pro zjednodušení zavedeme nulový potenciál v nekonečnu,  $V(\infty) = 0$ . Uvažujme infinitezimální element náboje  $dq = \lambda dz'$  umístěný ve vzdálenosti  $z'$  na ose  $z$ . Příspěvek k elektrickému potenciálu v bodě  $z > d$  je pak

$$dV = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{dz'}{z - z'}.$$

Integrováním podle celé délky vodiče pak získáme výsledný vztah

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{z+d}^{z-d} \frac{dz'}{z - z'} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{z+d}{z-d}.$$

- (b) Využijeme výsledku získaného v (a), elektrický potenciál v místě  $z = 4d$  je

$$V(z = 4d) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{4d+d}{4d-d} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{5}{3} \right).$$

Obdobně elektrický potenciál v místě  $z = 3d$  je

$$V(z = 3d) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{3d+d}{3d-d} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln 2.$$

Rozdíl elektrického potenciálu mezi těmito dvěma body je pak

$$\Delta V = V(z = 4d) - V(z = 3d) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{6}{5} \right) > 0.$$

S využitím skutečnosti, že rozdíl elektrického potenciálu je roven změně potenciální energie jednotkového náboje, dostaneme

$$\Delta U = q\Delta V = -\frac{|e|\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{6}{5} \right) < 0,$$

kde  $q = -e$  je náboj elektronu.

- (c) Započne-li elektron svůj pohyb z klidu v bodě  $z = 4d$ , pak je změna jeho kinetické energie rovna

$$\Delta W_K = \frac{1}{2} m v_{\text{fin}}^2.$$

Ze zákona zachování energie bude změna energie kinetické energie rovna

$$\Delta W_K = -\Delta U = \frac{|e|\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{6}{5} \right) > 0.$$

Snadno již určíme velikost rychlosti v bodě  $z = 3d$ :

$$v_{\text{fin}} = \sqrt{\frac{2|e|\lambda}{4\pi\epsilon_0 m} \ln \left( \frac{6}{5} \right)}.$$

### 3.9 Tématické otázky

1. Jak se liší elektrický potenciál od elektrické potenciální energie?
2. Homogenní elektrické pole je rovnoběžné s osou  $x$ . V jakém směru zde můžeme pohybovat nábojem, aniž by bylo zapotřebí dodávat náboji vnější práci?
3. Je bezpečné zůstat v automobilu s kovovou kostrou při bouřce? Vysvětlete.
4. Proč jsou ekvipotenciální plochy vždy kolmé na směr elektrických siločar?
5. Elektrické pole uvnitř duté, rovnoměrně nabitě koule, je nulové. Lze z toho vyvodit, že je uvnitř koule nulový i potenciál?

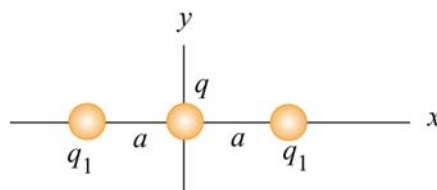
### 3.10 Neřešené úlohy

#### **P 3.10.1: Krychle**

Kolik práce vyžaduje umístění osmi shodných nábojů, každého o velikosti  $q$ , do rohů krychle o hraně  $a$ ?

#### **P 3.10.2: Trojice nábojů**

Trojice nábojů o velikosti  $q = 3 \times 10^{-18}$  C a  $q_1 = 6 \times 10^{-6}$  C je umístěna podle obrázku 3.10.1 na ose  $x$ . Vzdálenost mezi  $q$  a  $q_1$  jsou  $a = 0,6$  m.



Obr. 3.10.1.

- (a) Jakou silou působí na  $q$  zbývající dva náboje  $q_1$ ?
- (b) Jaké je elektrické pole v počátku soustavy způsobené dvojicí nábojů  $q_1$ ?
- (c) Jaký je elektrický potenciál vyvolaný dvojicí nábojů  $q_1$  v počátku soustavy?

#### **P 3.10.3: Práce vykonaná na nábojích**

Dva náboje  $q_1 = 3 \mu\text{C}$  a  $q_2 = -4 \mu\text{C}$  jsou na počátku ve vzdálenosti  $r_0 = 2$  cm. Vnější vlivem je tato vzdálenost změněna na  $r_{\text{fin}} = 5$  cm.

- (a) Jaká práce byla vykonána *elektrickým polem* při změně polohy nábojů? Je to práce kladná nebo záporná?
- (b) Jaká práce byla vykonána *vnějším činitelem* při změně polohy nábojů? Je to práce kladná nebo záporná?
- (c) Jaká je potenciální energie počátečního stavu soustavy, když jsou náboje od sebe vzdáleny 2 cm?
- (d) Jaká je potenciální energie konečného stavu soustavy, když jsou náboje od sebe vzdáleny 5 cm?
- (e) Jaká je změna potenciální energie mezi počátečním a konečným stavem soustavy?

### P 3.10.4: Výpočet pole E z potenciálu V

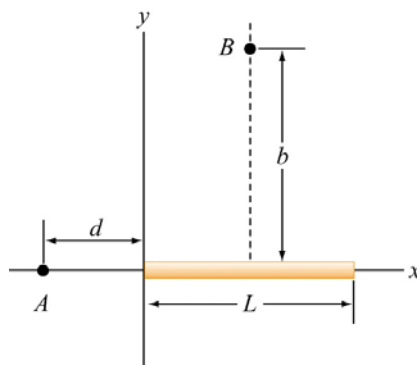
V části prostoru předpokládejme elektrický potenciál daný vztahem

$$V(x, z, y) = V_0 - E_0 z + \frac{E_0 a^3 z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

kde  $a$  je konstanta s rozměrem délky. Nalezněte prostorové složky  $x$ ,  $y$ ,  $z$  elektrického pole.

### P 3.10.5: Elektrický potenciál tyče

Tyč délky  $L$  leží v ose  $x$ , počátek soustavy je zvolen v levém konci tyče. Tyč je nerovnoměrně nabitá s hustotou náboje  $\lambda = \alpha x$ , kde  $\alpha$  je kladná konstanta.



Obr. 3.10.2.

- Jaký musí být rozměr konstanty  $\alpha$ ?
- Vypočtěte elektrický potenciál v bodě  $A$ .
- Vypočtěte elektrický potenciál v bodě  $B$ , který leží ve vzdálenosti  $b$  od středu tyče ve směru osy  $y$  kolmo na tyč.

### P 3.10.6: Elektrický potenciál

Předpokládejte, že je elektrický potenciál v části prostoru zadán takto:

$$V(x, y, z) = V_0 \exp(-k|z|) \cos(kx).$$

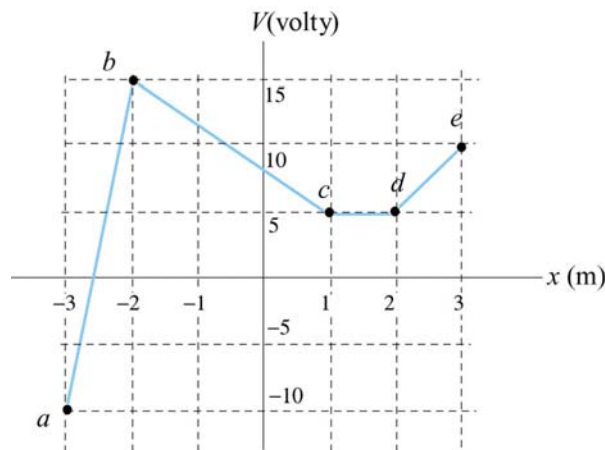
Určete elektrické pole v obecném bodě prostoru. Načrtněte elektrické silokřivky v rovině  $xz$ .

### P 3.10.7: Výpočet elektrického pole z elektrického potenciálu.

Předpokládejme proměnný elektrický potenciál podél osy  $x$  znázorněný graficky na obrázku 3.10.3. Potenciál se ve směru os  $y$  a  $z$  nemění. Určete elektrické pole  $E_x$ . Neuvažujte průběh v krajních bodech.

- Určete interval, ve kterém má  $E_x$  největší absolutní hodnotu. [25 V/m, v intervalu  $ab$ .]
- Určete interval, ve kterém má  $E_x$  nejmenší absolutní hodnotu. [0 V/m v intervalu  $cd$ .]
- Vykreslete  $E_x$  jako funkci  $x$ .
- Jaké je rozložení náboje, jímž je vytvořen výsledný potenciál? Jak jsou náboje rozmístěny? [Nabitě plochy podél osy  $x$  rozprostírající se z bodů  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , atd. ve směru  $yz$ .

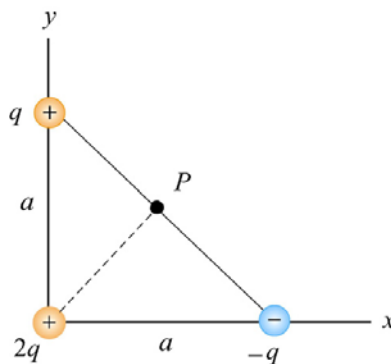
Povšimněte si, že plošný náboj velikosti  $\sigma$  vždy vytváří nespojitosti v normálové složce elektrického pole o velikosti  $[\sigma/\epsilon_0]$ .



Obr. 3.10.3.

**P 3.10.8: Elektrický potenciál a elektrická potenciální energie.**

Náboje  $q$ ,  $+2q$  a  $-q$  jsou rozmístěny ve vrcholech pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka podle obrázku 3.10.4.



Obr. 3.10.4.

- (a) Jaký je elektrický potenciál v bodě  $P$ , který je uprostřed přepony na spojnici  $+q$  a  $-q$ , předpokládáme-li  $V = 0$  v nekonečnu?  $[q/\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a]$
- (b) Jaká je *potenciální* energie  $U$  takto rozložené trojice nábojů? Jaký je význam znaménka energie?  $[-q^2/4\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a]$ , záporné znaménko značí práci, která byla vynaložena vnějším činitelem na přemístění nábojů z nekonečna do zobrazené sestavy.]
- (c) Do sestavy se pomalu blíží z nekonečna čtvrtý náboj  $+3q$ , který se umístí v bodě  $P$ . Kolik práce bude potřeba vynaložit na tento poroces? Jaké bude její znaménko?  $[+3q^2/\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a]$ , práce je kladná, byla dodána vnějším činitelem, který přemístil náboj z nekonečna]

**P 3.10.9: Elektrické pole, potenciál a energie.**

Trojice nábojů,  $+5Q$ ,  $-5Q$ , a  $+3Q$  je rozmístěna na ose  $y$  v polohách  $y = +4a$ ,  $y = 0$ , a  $y = -4a$ . Bod  $P$  leží na ose  $x$  v poloze  $x = 3a$ .



- (a) Kolik energie bylo spotřebováno na vytvoření soustavy nábojů?
- (b) Jaké jsou  $x$ ,  $y$ , a  $z$  složky elektrického pole  $\mathbf{E}$  v bodě  $P$ ?
- (c) Jakou hodnotu má elektrický potenciál  $V$  v bodě  $P$ , předpokládáme-li  $V = 0$  v nekonečnu?
- (d) Čtvrtý náboj  $+Q$  je do bodu  $P$  přemístěn z nekonečna. Jaké jsou  $x$ ,  $y$ , a  $z$  složky síly  $\mathbf{F}$ , kterou na něj působí původní trojice nábojů?
- (e) Kolik práce vykonal vnější činitel na přemístění náboje  $+Q$  z nekonečna do bodu  $P$ ?