

ÚLOHY Z ELEKTŘINY A MAGNETIZMU

SADA 5

Peter Dourmashkin

© MIT 2006, překlad: Vítězslav Kříha (2007)



Obsah

SADA 5	2
P ÚLOHA 1: ZKRAT	2
P ÚLOHA 2: DNA T4 FÁGA	2
P ÚLOHA 3: CENA ENERGIE	2
P ÚLOHA 4: PŘIZPŮSOBENÍ IMPEDANCÍ	2
P ÚLOHA 5: VYBÍJENÍ KONDENZÁTORŮ	2
P ÚLOHA 6: KIRCHHOFF	3
P ÚLOHA 7: VÝTAH NA BATERKY	3
ŘEŠENÍ ÚLOH	4
Ř ÚLOHA 1: ZKRAT	4
Ř ÚLOHA 2: DNA T4 FÁGA	4
Ř ÚLOHA 3: CENA ENERGIE	5
Ř ÚLOHA 4: PŘIZPŮSOBENÍ IMPEDANCÍ	5
Ř ÚLOHA 5: VYBÍJENÍ KONDENZÁTORŮ	5
Ř ÚLOHA 6: KIRCHHOFF	6
Ř ÚLOHA 7: VÝTAH NA BATERKY	7

Sada 5

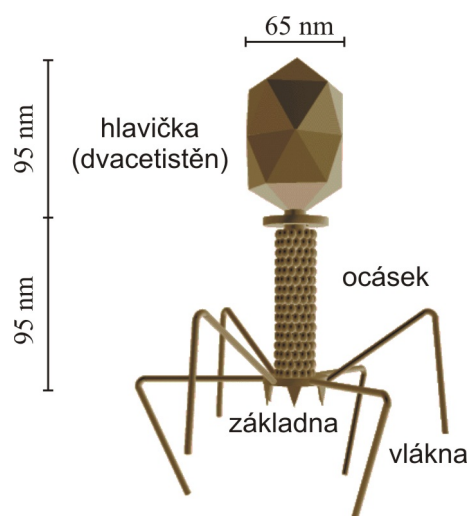
Úloha 1: Zkrat

Aby zajistili napájení jistého automatu v blízkosti sochy známého romantického básníka, rozhodli se vlastníci automatu napojit jej na rozvaděč na přilehlé vysokoškolské koleji. Dvojici vodičů táhli podél vycházkových cest až k oblíbenému místu dostaveníček. Jakmile přístroj poprvé použili, povšimli si, že jim mezi přívodními vodiči vzniknul zkrat (mezi vodiči vzniknul vodivý kontakt o nízkém odporu). Než byl automat použit, byl odpor mezi vodiči neměřitelně vysoký. Teď naměřili mezi vodiči u sochy 50Ω a na rozvaděči 80Ω . Předtím, než vodiče natáhli, naměřili, že odpor každého vodiče od jednoho konce ke druhému je 45Ω . Kde zhruba by měli pátrat po zkratu?

Úloha 2: DNA T4 fága

T4 fág (virus napadající bakterie zobrazený na obrázku) má řetězec DNA dlouhý kolem $50 \mu\text{m}$ stočený v hlavičce. DNA je nabitá tak, že na každých $1,7 \text{ \AA}$ připadá náboj jednoho elektronu.

- Jaká energie je nutná k umístění náboje do hlavičky T4 fága?
- Jaký tlak působí na hlavičku T4 fága? (Návod: $P = -dU / dV$)
- Je výsledek rozumný? Nezapomněli jsme na něco?



Úloha 3: Cena energie

Srovnajte cenu napájení stolní lampičky pomocí monočlanků typu D („velké buřty“) oproti zapojení do zásuvky. Má smysl používat dobíjecí články? Návod: V úloze 7 najdete čísla, která by se vám mohla hodit.

Úloha 4: Přizpůsobení impedancí

Máte baterii s napětím naprázdno (elektromotorickým napětím) V_0 a vnitřním odporem r_i . Tuto baterii chcete připojit k takovému rezistoru, aby výkon rozptýlovaný na rezistoru byl maximální. Jakou hodnotu odporu si vyberete?

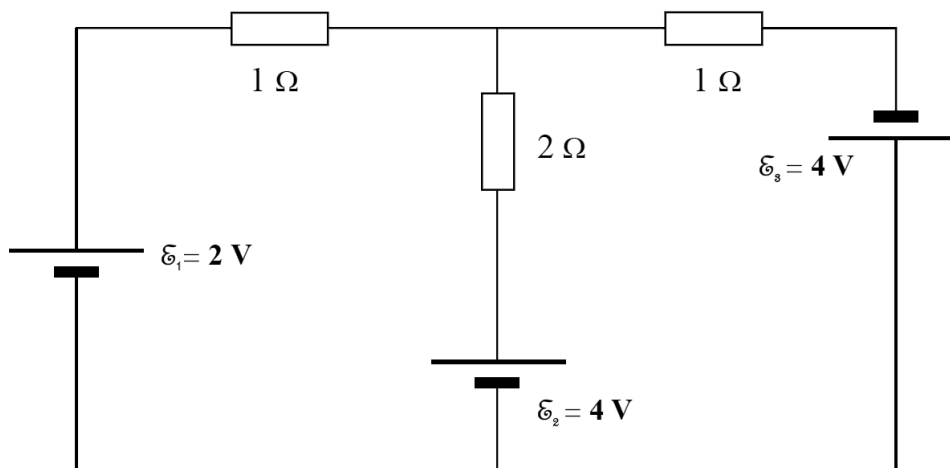
Úloha 5: Vybíjení kondenzátorů

Máte za úkol navrhnout kondenzátor (o kapacitě C) který si udrží svůj náboj po dlouhou dobu. Chcete na něj použít dielektrikum o relativní permitivitě ϵ_r a s odporem ρ . Tento odpor představuje problém – i když je velký, náboji časem umožní protéci z jedné elektrody na druhou. Jde vám tedy o maximalizaci odporu mezi elektrodami. Porovnejte odpory dielektrika mezi elektrodami pro rovnoběžné desky, válcový a kulový kondenzátor, každý s danou kapacitou C , avšak s rozměry, jaké si zvolíte. Návod: Spočítejte RC a odsud vyjádřete R .

Úloha 6: Kirchhoff

Máte zadaný obvod, vnitřní odpory zdrojů můžete zanedbat.

- Spočítejte proudy, které protékají všemi zdroji napětí (s udáním směru, nahoru či dolů).
- Spočítejte výkon dodaný nebo spotřebovaný (určete o jaký případ se jedná) pro každý zdroj.



Úloha 7: Výtah na baterky

Monočlánky typu AAA, AA, ..., D, klasické zinko-chloridové (-R) i alkalické (-LR), mají nezátížené napětí (elektromotorické napětí) 1,5 voltu. Rozdíl mezi různými velikostmi je v jejich životnosti (celkové uchované energii). AAA monočlánek (R03/LR03, mikrotužková baterie) má životnost 0,5 Ah, zatímco D baterie (R20/LR20, velký monočlánek, „velký buřt“) má životnost 10 Ah. Pochopitelně tato čísla záleží na tom, jak rychle je vybíjíte a na výrobci, ale jsou zhruba stejná pro ZnCl a pro alkalické baterie. Rozdíl mezi těmito typy je v jejich vnitřním odporu – u zinkochloridové baterie typu D je $1\ \Omega$, zatímco u alkalického D monočlánku je kolem $0,1\ \Omega$.

Předpokládejte, že máte vícerychlostní naviják s padesátiprocentní účinností, a snažíte se nadzdvihnout 60 kg hmoty (to bych rád věděl, co těch 60 kg asi může být za hmotu ☺). Naviják pracuje jako zátěž s proměnným odporem R_z podle nastavené rychlosti.

- Představte si, že zátěž je nastavena na velmi nízkou rychlost. Pak je odpor zátěže mnohem větší než vnitřní odpor a můžete předpokládat nulové ztráty na vnitřním odporu. Vypočítejte, jak vysoko můžete vytáhnout navijákem onu hmotu, než se baterie vybije, jak pro klasické D monočlánky (R20), tak pro alkalické D monočlánky (LR20).
- Pro R20 i LR20 určete, jaký odpor R_z musí být nastaven, aby naviják zdvihal hmotu s nejvyšší rychlostí. *Návod:* Už jste na podobnou otázku odpovídali.
- Jaká bude nejvyšší rychlost v m/s pro R20 i LR20?
- Najděte, jak vysoko může naviják vyzdvihnout onu hmotu do vybití baterii při nejvyšší rychlosti pro daný druh baterie.

Řešení úloh

Ř Úloha 1: Zkrat

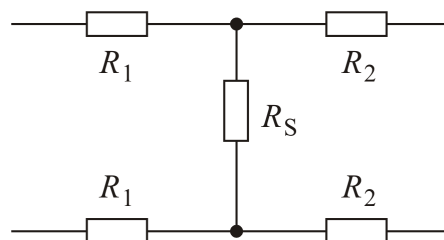
Situace je následující: Vodiče jsou zkratovány přes vodivý spoj o odporu R_S . Od jednoho konce k druhému mají odpor $R_1 + R_2 = 45 \Omega$. Měřeno u sochy mají odpor $2R_1 + R_S = 50 \Omega$, zatímco na rozvaděči mají $2R_2 + R_S = 80 \Omega$. Řešíme tedy algebraický problém (tři rovnice, tři neznámé):

$$(2R_1 + R_S) + (2R_2 + R_S) - 2(R_1 + R_2) = 2R_S \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_S = 20 \Omega};$$

$$2R_1 + R_S = 50 \Omega \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_1 = 15 \Omega};$$

$$2R_2 + R_S = 80 \Omega \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_2 = 30 \Omega};$$

Takže zkrat bude na třetině vzdálenosti od sochy k rozvaděči (odpor se dělí v poměru 1:2, tedy 1/3 ku 2/3).



Ř Úloha 2: DNA T4 fága

Řetězec DNA stočený v hlavičce má kolem $(50 \mu\text{m}) / (1,7 \text{ \AA}/e) \sim 3 \times 10^5 e$ náboje, což je zhruba $5 \times 10^{-14} \text{ C}$. Jestliže aproximujeme hlavičku jako kouli o poloměru $a \sim 50 \text{ nm}$, má kapacitu $C_{\text{koule}} = 4\pi\epsilon_0 a \sim 5 \times 10^{-18} \text{ F}$ (titěrnou!).

- (a) Energie soustavy tedy je $Q/2C \sim 3 \times 10^{-10} \text{ J}$. Nejspíš vůbec nemáte představu, jaká energie to je (vůbec byste si nevšimli, kdyby vás zasáhla bomba s takovou energií – nebo klidně i milionkrát větší). Pojďme proto na druhou otázku:
- (b) Abychom získali tlak, potřebujeme derivovat energii podle objemu jako složenou funkci

$$\begin{aligned} P &= -\frac{dU}{dV} = -\frac{dU}{da} \frac{da}{dV} = -\frac{dU}{da} \left(\frac{dV}{da} \right)^{-1} = \\ &= -\frac{d}{da} \left(\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a} \right) \left(\frac{d}{da} \frac{4}{3} \pi a^3 \right)^{-1} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a^2} (4\pi a^2)^{-1} = \\ &\sim 10^{11} \text{ Pa} \sim 10^6 \text{ atm}. \end{aligned}$$

Takový tlak je OBROVSKÝ, což vede k odpovědi na následující otázku...

- (c) Takový výsledek není možný – něčemu jsme nevěnovali patřičnou pozornost. Náboj DNA nemůže zůstat nevykompenzovaný. Fág se vytváří v roztoku a ionty tohoto roztoku jsou přirozeně přitahovány k DNA a neutralizují ji. Náboj je však velice důležitý, vede (nebo napomáhá) ke stáčení a skládání DNA. Je jasné, že bez neutralizace náboje DNA by nikdy nebylo možné, aby se namačkala do kuliček tak malých, že se vejdou do jader buněk.

Ř Úloha 3: Cena energie

Monočlánek typu D je (v souladu se zadáním úlohy 7) je 1,5 V baterie s nábojem 10 Ah, takže celková akumulovaná energie je 15 Wh. Toto číslo bychom mohli převést na zhruba 50 kJ, ale watt hodiny jsou užitečné jednotky, neboť elektřina je obvykle účtována v kilowatt hodinách, což porovnání činí jednodušším. Monočlánek typu D stojí řekněme 30 Kč (můžete si zaplatit víc, ale proč byste to dělali, pokud ovšem nepotřebujete pohánět plyšového králíčka). Výsledně při použití baterií zaplatíte kolem 30 Kč/0,015 kWh, tedy 2 000 Kč/kWh.

Elektřina pro domácnosti stojí řekněme 3 Kč/kWh. Takže baterie jsou téměř o tři řády dražší. To jednoznačně mluví pro používání dobíjecích článků – dokonce i když jsou o něco dražší, vrátí se vám to během několika dobití. Co se týče vaší lampičky, případně čehokoli, co může běžet na baterky nebo ze zásuvky, napájejte ze sítě. Pokud je lampička 60-wattová, za každou hodinu platíte 18 haléřů při napájení ze sítě, zatímco na baterky běží za 120 korun.

Ř Úloha 4: Přizpůsobení impedancí

Výkon rozptýlovaný na rezistoru s odporem R je

$$P = I^2 R = \left(\frac{V_0}{R + r_i} \right)^2 R = V_0^2 \frac{R}{(R + r_i)^2}.$$

Tuto hodnotu chceme maximalizovat vzhledem k R :

$$\frac{dP}{dR} = \frac{d}{dR} \left(V_0^2 R (R + r_i)^{-2} \right) = V_0^2 \left[(R + r_i)^{-2} - 2R (R + r_i)^{-3} \right] = 0.$$

Po vynásobení obou stran členem $V_0^2 (R + r_i)^3$ získáme

$$[(R + r_i) - 2R] = r_i - R = 0.$$

To je obecný výsledek. Pro maximalizaci dodávky výkonu chceme, aby „impedance“ (odpor), kterou nastavujeme, odpovídala „impedanci zdroje“ (vnitřnímu odporu). Všimněte si, že toto není nejefektivnější cesta jak něco nastavit – polovina výkonu zdroje se ztrácí na zdroji (je rozptýlována na vnitřním odporu baterie).

Ř Úloha 5: Vybíjení kondenzátorů

Jistě už jste si někdy spočítali kapacity ve všech těchto geometriích, ale krátce připomenu, jak na to.

Deskový kondenzátor (plocha je A , mezera d)

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_r \epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_r \epsilon_0 A} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{Qd}{\epsilon_r \epsilon_0 A} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d}; \quad R = \frac{\rho d}{A}; \quad \Rightarrow$$

$$RC = \rho \epsilon_r \epsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{\rho \epsilon}{C}}$$

Vidíme, že odpor nezávisí ani na A ani na d .

Válcový kondenzátor (vnitřní poloměr a , vnější poloměr b , délka L)

$$E = \frac{Q}{2\pi r L \epsilon_r \epsilon_0} \Rightarrow V = \frac{Q}{2\pi L \epsilon_r \epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow C = \frac{2\pi \epsilon_r \epsilon_0 L}{\ln(b/a)}.$$

Pro výpočet odporu si dielektrikum v radiálním směru pomyslně rozdělíme na tenké prstence zapojené do série. Představte si tenký prsteneček s poloměrem r , tloušťkou dr , a délkou L . Jeho příspěvek k celkovému odporu je

$$dR = \frac{\rho dl}{A} = \frac{\rho dr}{(2\pi r)L} = \frac{\rho}{(2\pi)L} \frac{dr}{r}.$$

Odpor celé válcové vrstvy dielektrika je dán součtem příspěvků všech tenkých prstenců:

$$R = \frac{\rho}{(2\pi)L} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi L} \ln \frac{b}{a} \Rightarrow RC = \rho \epsilon_r \epsilon_0 \Rightarrow \boxed{R = \frac{\rho \epsilon}{C}}.$$

Odpor opět nezávisí na rozměrech.

Kulový kondenzátor (vnitřní poloměr a , vnější poloměr b)

$$E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0 r^2} \Rightarrow V = \frac{Q}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \Rightarrow C = \frac{4\pi \epsilon_r \epsilon_0 ab}{b-a}$$

Pro výpočet odporu si dielektrikum v radiálním směru pomyslně rozdělíme na tenké slupky (kulové vrstvy s poloměrem r a tloušťkou dr) zapojené do série. Jejich příspěvek k celkovému odporu je

$$dR = \frac{\rho dl}{A} = \frac{\rho dr}{4\pi r^2}.$$

Odpor celé kulové vrstvy dielektrika je dán součtem příspěvků všech tenkých slupek:

$$R = \frac{\rho}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho}{4\pi L} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \Rightarrow RC = \rho \epsilon_r \epsilon_0 \Rightarrow \boxed{R = \frac{\rho \epsilon}{C}}.$$

Odpor opět nezávisí na rozměrech. Vidíte, že je jedno, jaký materiál si vyberete, protože odpor dielektrika je dán kapacitou, permitivitou a měrným odporem. Chcete-li omezit samovybíjení, musíte si vybrat vhodnější dielektrikum.

Ř Úloha 6: Kirchhoff

- (a) Představte si dvě proudové smyčky, obě ve směru hodinových ručiček s proudy I_1 v levé smyčce a I_2 v pravé smyčce. Označme si $R = 1 \Omega$. V souladu s Kirchhoffovým zákonem (začínáme vždy v levém horním rohu a postupujeme do směru hodinových ručiček) dostáváme:

$$\sum \Delta V = -I_1 R - (I_1 - I_2) 2R - \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1 = 0,$$

$$\sum \Delta V = -I_2 R + \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_2 - (I_2 - I_1) 2R = 0,$$

Vidíme, že zavedení označení $R = 1 \Omega$ není nic jiného, než normování, jenom není zcela dotažené do konce z důvodu názornosti. Při rutinním řešení obvodů pomocí tohoto Kirchhoffova zákona se odpory zapisují v bezrozměrných veličinách a napětí se vyjadřují přepočtená v ampérech. Zde je normování vůči 1Ω na místě, obecně se vybírá největší

společný dělitel hodnot odporů (případně i napětí zdrojů). Dosazením hodnot již dostaneme znormalizovaný tvar, který po převedení konstant na pravou stranu zapíšeme v maticové podobě:

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \end{bmatrix}$$

a soustavu vyřešíme Kramerovou metodou:

$$\Delta = 5, \quad \Delta_1 = 10, \quad \Delta_2 = 20; \quad \Rightarrow \quad I_1 = 2 \text{ A}, \quad I_2 = 4 \text{ A}$$

$$I_{\text{levý}} = I_1 = 2 \text{ A (nahoru)};$$

$$I_{\text{prostřední}} = I_2 - I_1 = 2 \text{ A (nahoru)};$$

$$I_{\text{pravý}} = I_2 = 4 \text{ A (dolů)};$$

$$(b) \quad P_{\text{levý}} = I_1 \mathcal{E}_1 = 4 \text{ W}; \quad P_{\text{prostřední}} = (I_2 - I_1) \mathcal{E}_2 = 8 \text{ W}; \quad P_{\text{pravý}} = I_2 \mathcal{E}_3 = 16 \text{ W}.$$

Ve všech třech případech proud teče skrz zdroj od jeho záporného pólu ke kladnému, tudíž všechny zdroje dodávají energii.

Ř Úloha 7: Výtah na baterky

- (a) Tato otázka se týká pouze energie. R20 i LR20 mají nashromážděnu energii $(1,5 \text{ V}) \times (10 \text{ Ah})$ což je 54 kJ. Výsledně R20 i LR20 vyzdvihnou onu hmotu do stejné výše:

$$U = mgh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{0,5 \times U}{mgh} = 46 \text{ m}.$$

Koeficient 0,5 vyjadřuje padesátiprocentní účinnost navijáku.

- (b) Nejvyšší rychlost odpovídá největšímu rozptýlení výkonu v navijáku. Takže jde o případ, kdy je odpor navijáku roven vnitřnímu odporu baterie (viz úloha 3):

$$R_L(\text{R20}) = 1 \Omega, \quad R_L(\text{LR20}) = 0,1 \Omega.$$

- (c) Rychlost zdvihu zjistíme z výkonu:

$$P = I^2 R = \left(\frac{V_0}{R_L + r_i} \right)^2 R_L = \frac{V_0^2}{4r_i} = \overset{50\% \text{ účinnost}}{2 \times} \frac{d}{dt} (mgh) \quad \Rightarrow \quad v = \frac{dh}{dt} = \frac{V_0^2}{8r_i mg}$$

Pro R20 dostáváme $v = 0,48 \text{ mm/s}$ a pro LR20 dostáváme $v = 0,48 \text{ mm/s}$.

- (d) Vyjdeme z řešení otázky (a) s uvážením, že polovinu energie vyplýváme na vnitřním odporu, takže naviják může vyzdvihnout hmotu do poloviční výšky, tj. do 23 m