

ÚLOHY Z ELEKTŘINY A MAGNETIZMU SADA 10

Peter Dourmashkin

© MIT 2006, překlad: Vítězslav Kříha (2007)



Obsah

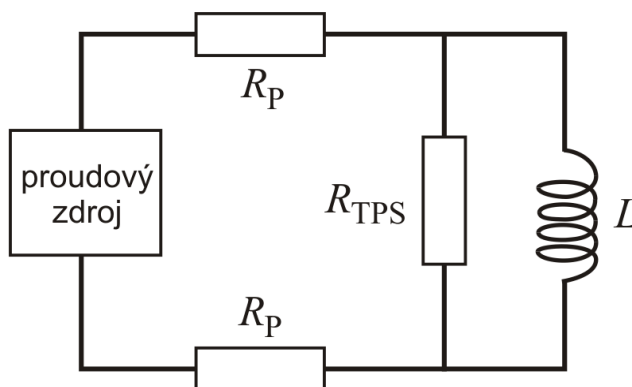
SADA 10	2
P ÚLOHA 1: MRI MAGNET	2
P ÚLOHA 2: INDUKČNÍ CÍVKA	3
P ÚLOHA 3: SMYČKA V MAGNETICKÉM POLI	3
P ÚLOHA 4: VZNÍCENÍ AUTOMOBILU	4
P ÚLOHA 5: DEFIBRILÁTOR	5
ŘEŠENÍ ÚLOH	7
Ř ÚLOHA 1: MRI MAGNET	7
Ř ÚLOHA 2: INDUKČNÍ CÍVKA	8
Ř ÚLOHA 3: SMYČKA V MAGNETICKÉM POLI	9
Ř ÚLOHA 4: VZNÍCENÍ AUTOMOBILU	10
Ř ÚLOHA 5: DEFIBRILÁTOR	11

Sada 10

Úloha 1: MRI magnet

V úloze 2 sady 9 se počítají magnety pro diagnostickou nukleární magnetickou rezonanci (MRI), které jsou dlouhé dva metry, vnitřní průměr mají 0,75 m a vytvářejí pole 4 T, když jsou vybuzeny 100 A.

Magnety jsou supravodivé a jsou buzeny metodou znázorněnou na obrázku. K buzení magnetů se používá proudový zdroj (zařízení teoreticky schopné vytvořit jakékoli potřebné napětí pro získání požadovaného proudu; zdroj napětí neboli ideální baterie oproti tomu dává požadované napětí při libovolném odběru proudu). Proudový zdroj je připojený přívody (oba mají odpor $R_P = 0,5 \Omega$) k solenoidu (jeho indukčnost $L=1,1 \text{ kH}$ jste spočítali v úloze 2 sady 9). Ostatní vodiče, na které jsou napojeny přívody, včetně cívky, jsou supravodivé s výjimkou malého kousku vodiče zapojeného paralelně k cívce, který je zahříván nad teplotu jeho supravodivého přechodu tak, aby měl odpor $R_{\text{TPS}} = 10 \Omega$ (TPS je zkratka pro trvalý proudový spínač).



Proud je pomalu navyšován (lineárně v čase) až do požadované hodnoty. Proč pomalu? Cívka se jako každá indukčnost (a $L=1,1 \text{ kH}$, hodně jemně řečeno, není zrovna malá indukčnost!) brání změně proudu v čase. Není žádoucí se s cívkou příliš přetlačovat, protože to vede k rozptylování energie na TPS rezistoru. Celý magnet je ponořený do kapalného hélia, které je v blízkosti TPS díky uvolněnému teplu uváděno do varu. Za hodinu 1 W dodaného tepla odpaří 1 litr tekutého hélia.

- (a) Kolik tekutého hélia je odpařeno energií rozptýlenou na TPS rezistoru, trvá-li vybuzení magnetu jednu hodinu? Toto číslo je důležité, protože při ceně 150 Kč/dm^3 je tekuté hélium docela drahé a chcete minimalizovat jeho odpar.

Jakmile nabudíte cívku potřebným proudem, topné tělísko na TPS se vypne a odpor klesne k nule. Zdroj proudu se potom odpojí a proud magnetu teče přes TPS s nulovým odporem. Jelikož cívka je supravodivá, proud v tomto obvodu zůstává konstantní navždy (nebo aspoň tak dlouho, jak jej chladíte).

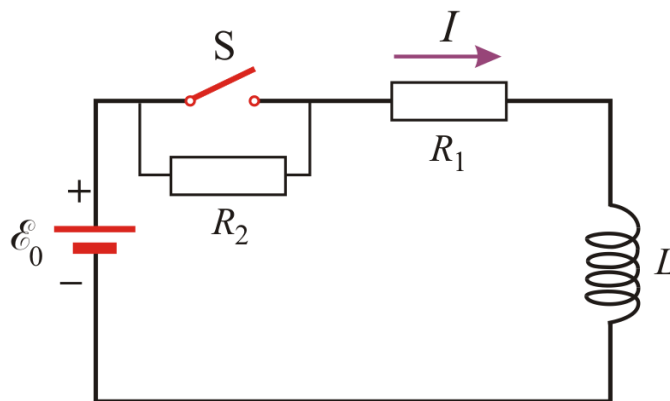
Náhodou dojde k chybě. Například, někdo přinese magnetický materiál do místnosti, jako třeba nosítka nebo plynovou láhev, ten je vtažen do magnetu a tím způsobí, že část magnetu přejde ze supravodivého stavu do normálního (připomínám, že tomuto přechodu dochází jak překročením kritické teploty, tak kritické intenzity magnetického pole).

- (b) Napište rovnici popisující časový vývoj proudu, pokud se v čase $t = 0$ náhle objeví odpor $1 \text{ k}\Omega$ na dolní smyčce.

- (c) Dejme tomu, že magnet je v nádobě s 1000 litry kapalného hélia (možná je to nadhodnocené, ale jde o opravdu veliký magnet). Kolik hélia bude vyvařeno při ztrátě supravodivosti? Jak rychle?
- (d) Při fázovém přechodu z kapaliny do plynu se objem hélia zvětší 750×. Jaký tlak vznikne po ztrátě supravodivosti, předpokládáme-li, že nádoba byla za atmosférického tlaku a zcela naplněná. Jakou sílu tento tlak vyvine na vnitřní stěnu MRI tunelu, tedy proti pacientovi? Měl by se bát?

Úloha 2: Indukční cívka

Mějme obvod, ve kterém je zapojena cívka s indukčností 12 H sériově s rezistorem $R_1 = 3 \Omega$, spínačem S a zdrojem \mathcal{E}_0 . Ve výchozím stavu je spínač rozpojený a proudem neteče žádný proud. Zobrazený rezistor R_2 zatím neberte v potaz. Po sepnutí spínače chvíli počkáme.

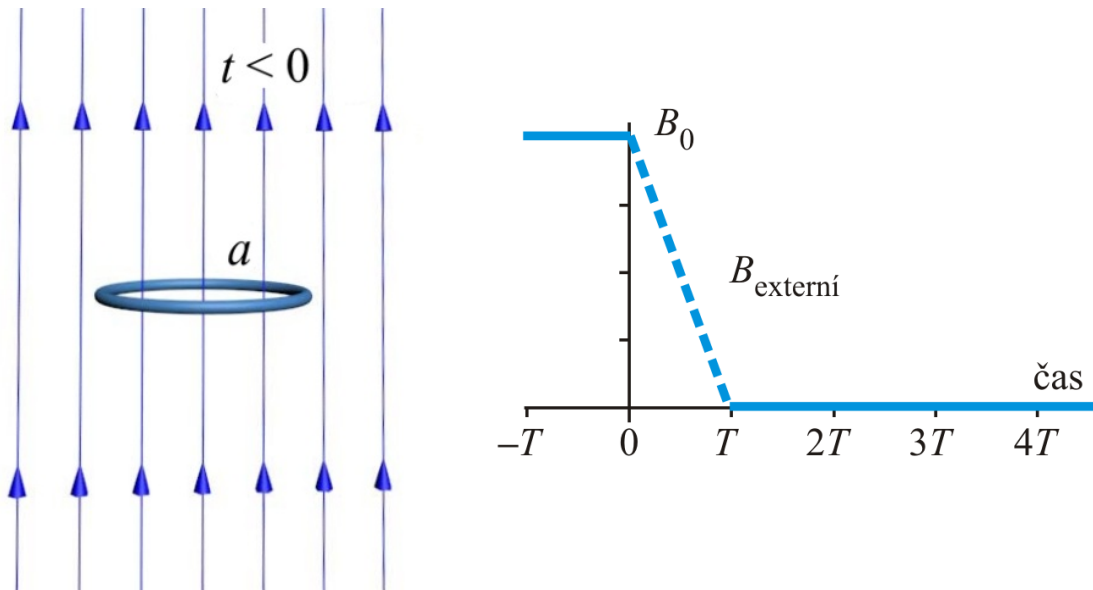


- (a) Jaké musí být elektromotorické napětí zdroje, aby cívka mohla být buzena 150 A, a jak dlouho si musíme počkat, aby proud vzrostl na 140 A?
- (b) V okamžiku $t = 0$, kdy cívkou protékal proud 150 A, byl rozpojen spínač. Mezi rozpojenými kontakty vzniknul oblouk a došlo k rychlému vybití energie nakumulované v cívce. Řekněme, že výboj trval 80 ms. Jaký musel být odpor oblouku (ve schématu je vyjádřený pomocí rezistoru R_2)?
- (c) Zapište časovou závislost $I(t)$ v obvodu pro $t > 0$. Berete v potaz baterii?
- (d) Jaká bude hodnota úbytku napětí na R_2 (oblouk) v okamžiku rozpojení spínače? Jak dlouhý oblouk vytáhnete? Odpovídá to skutečnosti?
- (e) Jak velký bude úbytek napětí na rezistoru R_1 pro $t > 0$? Je důvodná obava, že se rezistor během vybíjení cívky spálí?

Úloha 3: Smyčka v magnetickém poli

Smyčka z vodivého materiálu má odpor R , indukčnost L , a poloměr a . Smyčka je umístěna v konstantním, svisle orientovaném, vnějším poli $\mathbf{B}_{\text{vnější}} = B_0 \hat{\mathbf{z}}$ po dlouhou dobu (viz obrázek). Vnější pole je tvořeno proudy, které nejsou zobrazeny. Ve výchozím stavu smyčkou neprotéká proud. V čase $t = 0$ vnější pole začne lineárně klesat k nule, které dosáhne v čase T (průběh je na grafu níže):

$$\mathbf{B}_{\text{vnější}} = \begin{cases} B_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right) \hat{\mathbf{z}}; & \text{pro } 0 \leq t \leq T, \\ 0; & t > T. \end{cases}$$



Zajímá nás časový vývoj proudu pro $t > 0$:

- Pro $t > 0$ začne smyčkou, do té doby bez proudu, protékat proud. Jakým směrem poteče? Zdůvodněte.
- Představte si, že v čase $0 < t < T$ je cívka supravodivá. V Faradayově zákonu tudíž musí z důvodu nulového R být nulový člen IR :

$$IR = -\frac{d}{dt} \iint [\mathbf{B}_{\text{vlastní}} + \mathbf{B}_{\text{vnější}}] \cdot d\mathbf{A} = -\frac{d}{dt} \left\{ LI + \iint_S \mathbf{B}_{\text{vnější}} \cdot d\mathbf{A} \right\}.$$

Najděte z této rovnice výraz pro proud $I(t)$ ve smyčce a zakreslete ji do grafu. Maximální hodnotu proudu vyjádřete pomocí L , B_0 , a . V případě, že by se vám tuto podotázku nepodařilo zodpovědět, označte si v dalších podotázkách proud $I(T) = I_1$.

- Během $T < t < 2T$ je vnější pole stále nulové a odpor smyčky je stále nulový. Vyjádřete slovně, jaký bude časový vývoj proudu, a zakreslete výsledek do grafu.
- V čase $t = 2T$ smyčka přejde ze supravodivého do normálního stavu. Její odpor se náhle změní na nenulovou hodnotu R , pro kterou platí $L/R = 2T$. Zakreslete následující chování proudu ve smyčce pro časy $t > 2T$ do grafu ($e^{-1} = 3,7$). Zapište analytické vyjádření časové závislosti proudu.
- V čase $t = 2T$ je v magnetickém poli smyčky nakumulována energie. Zapište rovnici bilance energie, za předpokladu, že odpor je nenulový a na smyčku nepůsobí vnější pole.

Úloha 4: Vznícení automobilu

Prohlédněte si videozáznam [vznícení auta](#) z kamery u benzínky. Ze začátku je videozáznam poněkud rozvleklý, nás zajímá posledních 20 sekund. Z názvu videa asi tušíte, co nás bude zajímat. K zapálení hořlavé směsi (jako třeba benzínových výparů) potřebujete jiskru, která dodá minimální zápalnou energii. Pro benzín je to kolem 1 mJ (přibližně, může se to měnit například podle přísad).



- (a) Ověřme si, že benzín v autě v tomto případě zažehnul elektrostatický výboj. Kapacita ženy bude kolem 200 pF. Jaký potenciál na sobě musela mít, aby stačil na vznícení benzínu? Je to vůbec možné?
- (b) Zdá se, že žena měla na sobě boty s gumovou podrážkou. Za výchozí bod vezmeme potenciál, který by mohl vytvořit výboj dlouhý 0,5 cm. Měrný odpor gumy budeme brát $10^{13} \Omega \text{ m}$. Má smysl ji žádat, aby počkala, až se vybije skrze podrážku?
- (c) Vezměme v úvahu i vodivost vzduchu, která je srovnatelná s vodivostí gumy (řekněme, že večer byla nízká vlhkost, $\rho \sim 4 \times 10^{13} \Omega \text{ m}$). Jak uzemnění přes vzduch ovlivní vybíjení (pokud ho vůbec ovlivní?). *Návod:* Podívejte se na úlohu 5 sady 5.
- (d) Automobil sám je zdrojem statické elektřiny. Během jízdy dochází k různému tření (vzduch o automobil, pneumatiky o vozovku, ...) Předpokládejte, že se automobil nabije na maximální možné napětí (je omezeno korónovým výboje, vzpomeňte si na van de Graaffův generátor). Jak dlouho byste měli nechat auto vybíjet, než natankujete? (*Návod:* Musíte udělat několik předpokladů, mimo jiné, že pracujete pro výrobce automobilů, který by vyskakoval až ke stropu, pokud by jeho výrobky vybuchovaly u čerpacích stanic.)
- (e) Pokud by předchozí výsledek byl neuspokojivý, je možné nějak situaci zlepšit? Jsou řidiči, kteří potřebují natankovat opravdu rychle.

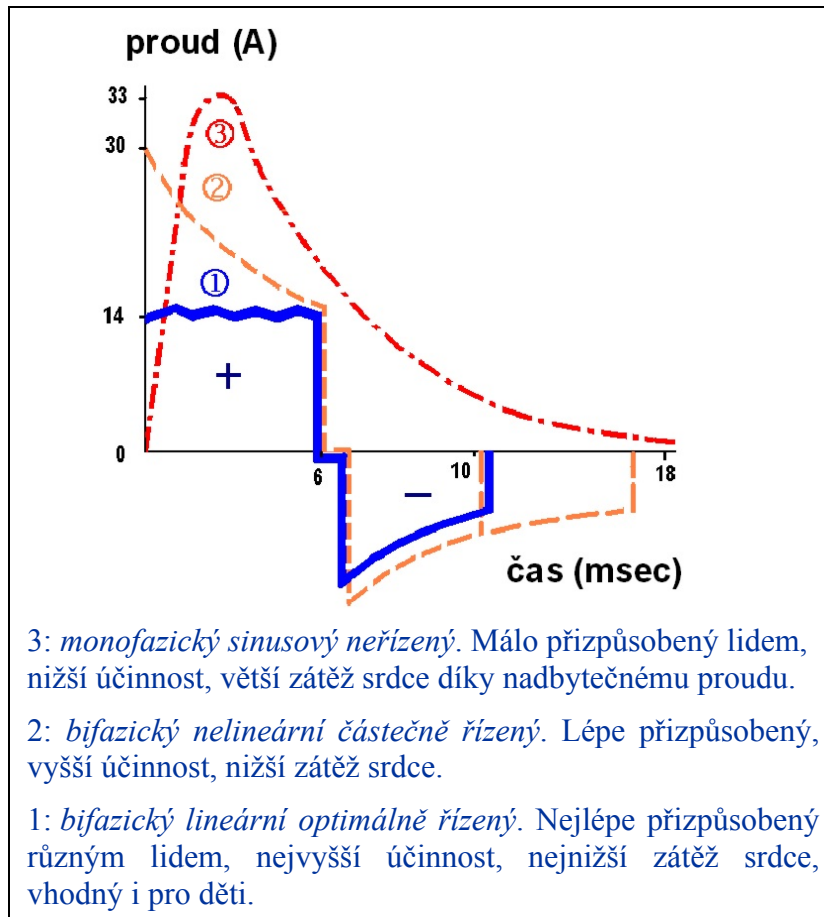
P Úloha 5: Defibrilátor

Použití defibrilátorů ve filmech z lékařského prostředí je skoro stejně oblíbené jako vystřikování drahocenných léků na podlahu před zabodnutím injekční stříkačky do pacienta. Tak oblíbené, že není až tak vzácné vidět, jak filmoví hrdinové prohánějí proud skrz pacienta, který má na EKG vodorovnou čáru, tedy žádnou srdeční elektrickou aktivitu. Případně konstatují „Zástava!“ a už třou elektrody, jako kdyby se je snažili nabít statickou elektřinou. V těchto případech defibrilace nemůže pomoci. Defibrilace, tedy průchod elektrického proudu srdcem pacienta, je určena k PŘERUŠENÍ nezdravé elektrické aktivity srdce, čímž se vytvoří podmínky pro samovolné obnovení zdravé aktivity. Srdce ale musí být samo schopné elektrické činnosti.

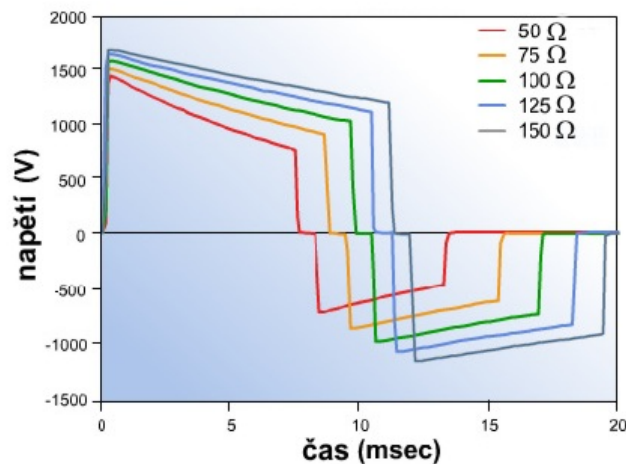
První generace defibrilátorů byly vlastně jen velké kondenzátory, které se nabily a potom zkratovaly přes pacienta. K zajištění lepšího elektrického kontaktu s pacientem se elektrody potírají vodivým gelem (ten se skutečně roztírá mezi elektrodami). Typickou hodnotou odporu při průchodu proudu skrz hrudník pacienta je zhruba 100Ω . Novější defibrilátory

pracují s bifázickým výbojem, napětí na elektrodách se zhruba v polovině léčivého pulsu přepne do opačné polarity. Pracují s delší dobou výboje a tudíž i plošším proudovým profilem. Dalšími zdokonaleními je například použití rektilineárního bifázického proudového průběhu nebo použití trifázického a vícefázických průběhů.

Jiným zdokonalení defibrilátorů bylo přizpůsobení různým impedancím pacientů, takže proudové profily pro různé odpory pacientů vypadají podobně, jako je znázorněno na obrázku.



(a) Jaká veličina je zhruba stejná pro všech pět pacientů znázorněných na grafech průběhů proudu pro různé odpory. Pomůcka: Určitě to nebude proud a ani napětí. Nepočítejte přesně, stačí hrubý odhad.



- (b) Ověřte, že tyto průběhy mohou být modelovány jako prosté vybíjení kondenzátoru přes vyznačené odpory (příčemž polarita je v polovině přepnuta) porovnáním kapacit při průbězích pro 50Ω a 150Ω .
- (c) Máte zcela vybitý defibrilátor a napájíte ho z 500 W vysokonapěťového zdroje nastaveného na konstantní napětí $2\,000 \text{ V}$. Přes jaký odpor musíte optimálně nabíjet defibrilátor? Pod pojmem „optimálně“ je míněno tak rychle, jak to jen půjde (aby pacient mohl dostat další léčivý výboj, bude-li třeba) bez překročení jmenovitého zatížení zdroje.
- (d) Za jak dlouho se kondenzátor nabije na $1\,600 \text{ V}$ při použití zdroje popsaného v (c) a Vámi spočteného rezistoru?

Řešení úloh

Ř Úloha 1: MRI magnet

$$(a) P = \left(\frac{\mathcal{E}_{\text{induk}}^2}{R_{\text{TPS}}} \right) = \frac{1}{R_{\text{TPS}}} \left(L \frac{\Delta I}{\Delta t} \right)^2 \approx 93 \text{ W} \quad \Rightarrow$$

spotřeba 93 dm^3 tekutého hélia za zhruba $14\,000 \text{ Kč}$.

$$(b) I = I_0 e^{-t/\tau}, \quad \text{kde } \tau = \frac{L}{R} = 1,1 \text{ s}, \quad I_0 = 100 \text{ A}.$$

(c) Téměř veškerá energie magnetu klesne za zhruba 3 sekundy. (Trojnásobek časové konstanty znamená, že se proud sníží $e^3 \sim 30\times$, takže energie klesne $30^2 \sim 1\,000\times$. Celková energie v soustavě je $U = LI^2/2 = 5,5 \times 10^6 \text{ J} \approx 1,5 \text{ kWh}$. To znamená, že by se odpařilo $1\,500$ litrů hélia, kdyby v nádobě ovšem tolik hélia vůbec bylo. Jinak řečeno, energie stačí nejen na odpaření všeho hélia, ale i na jeho ohřev.

(d) Asi tušíte, že jistý důvod k obavám o zdraví pacienta je na místě. Předpokládejme, že se náhle odpaří všech $1\,000$ litrů tekutého hélia, takže za atmosférického tlaku by se objem zvětšil $750\times$. Pokud zůstane nádoba uzavřena, zvětší se $750\times$ tlak na 75 MPa . Ale to ještě není vše. Stále nám zbývá ještě asi třetina uvolněné energie (tj. asi $1,8 \text{ MJ}$) na ohřev plynného hélia. Helium má jednoatomové molekuly, molární tepelnou kapacitu při konstantním objemu odhadneme z ekvipartičního teorému na $C_V = 3k_B N_A / 2$. Dodané teplo vede k zvýšení teploty o

$$\Delta T = \frac{Q}{nC_V} = \frac{Q}{\frac{\rho_{\text{He}} V_{\text{He}}}{M_{\text{He}}} C_V}.$$

Dosadíme-li číselné hodnoty (hustota kapalného hélia je 124 kg/m^3 , molární hmotnost je $0,004 \text{ kg/mol}$) dostáváme $\Delta T \approx 5 \text{ K}$. Jelikož výchozí teplota byla 4 K , tlak se v důsledku ohřevu ještě zhruba zdvojnásobí.

Tento způsob odhadu můžete použít i za předpokladu, že se uvolněným teplem nestačí odpařit všechno tekuté helium (helium není příliš dobrým vodičem tepla – pokud ovšem není kapalné a v supratekutém stavu – a tři sekundy není příliš dlouhá doba na výměnu energie!). Bez ohledu na odhadnutý zlomek odpařeného hélia a následně ohřivaného hélia dospějete k řádově stejnému výsledku.

Nakolik jsou takové tlaky schopny poškodit kryostat? Meze pevnosti kovů v tahu jsou řádově $10^8 \div 10^9$ Pa, přičemž tato čísla platí za pokojových teplot. Při hlubokém zmražení budou kovy pochopitelně méně tažné. I kdybychom tyto hodnoty brali jako nadhodnocený odhad, je jasné, že tloušťka stěn u kryostatu asi nebude řádově desetina charakteristických příčných rozměrů, takže vytvoření takovýchto přetlaků by vedlo k zničení kryostatu.

V reálných zařízeních jsou pochopitelně přetlakové ventily, které v případě ztráty supravodivosti (ke kterému může dojít a také dochází) rychle odstraní ze systému hélium. Dále jsme ve svých destruktivních úvahách vůbec nebrali v potaz, že héliový kryostat je umístěný ještě v dusíkovém kryostatu.

Ke ztrátě supravodivosti magnetů dochází i v laboratorních podmínkách. Obvykle používáme kolem 50 litrů hélia, ale pokud se všechno odpaří, zaplní místnost velice studeným plynem, který se obtížně se dýchá, takže při práci s tekutým héliem buďte opatrní!

Ř Úloha 2: Indukční cívka

- (a) Časová konstanta je $L/R = 4$ s. Proud vzrůstá v čase podle vztahu

$$I = I_{\max} (1 - e^{-t/\tau}) \quad \Rightarrow \quad t = \tau \ln(1 - I/I_{\max}) \approx 10,8 \text{ s.}$$

Aby protékalo 150 A skrz 3Ω odpor, potřebujeme $\mathcal{E}_0 = 450$ V.

- b) Pod trváním výboje budeme chápat snížení proudu na 90 %, což odpovídá dvojnásobku časové konstanty $\tau = 40$ ms :

$$R_2 \approx L/\tau \approx 300 \Omega.$$

Všimněte si, že s ohledem na malou hodnotu odporu R_1 jsme tuto hodnotu nezahrnuli do odhadu.

- (c) $I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$, kde $\tau = 40$ ms, $I_0 = 150$ A .

Baterii jsme do odhadu nezahrnuli. Elektromotorické napětí indukované na cívce je mnohem vyšší než napětí baterie, jak uvidíme v následující odpovědi.

- (d) $V = RI \approx 45$ kV.

Protože průrazné napětí ve vzduchu jsou 3 MV/m, odhadneme pomocí $V = E/d$ délku oblouku kolem 2 cm. Tato hodnota nás nepřekvapí, odpovídá našim pozorováním.

- (e) Jak velký bude úbytek napětí na rezistoru R_1 pro $t > 0$? Je důvodná obava, že se rezistor spálí, během vybíjení cívky?

$$V_{R_1}(t) = I(t)R_1 = V_0 e^{-t/\tau}, \quad \text{kde } \tau = 450 \text{ ms, } V_0 = I_0 R_1 = 450 \text{ V}$$

Tomuto rezistoru spálení nehrozí, protože napětí na něm nepřekročí napětí při kterém dochází k vybuzení cívky. I když elektromotorické napětí na cívce naroste, většina potenciálového rozdílu je na rozpojeném spínači.

Ř Úloha 3: Smyčka v magnetickém poli

- (a) Při pohledu shora proud teče proti směru hodinových ručiček. Směr proudu odpovídá vlastnímu magnetickému poli smyčky uvnitř smyčky, které směřuje vzhůru, což kompenzuje zmenšování magnetického toku magnetického vnějšího pole.
- (b) Vyjdeme ze vztahu

$$0 = -\frac{d}{dt} \left\{ LI + \iint_S \mathbf{B}_{\text{vnější}} \cdot d\mathbf{A} \right\} \Rightarrow$$
$$\left\{ LI + \iint_S \mathbf{B}_{\text{vnější}} \cdot d\mathbf{A} \right\} = \left\{ LI + \pi a^2 B_0 \left(1 - \frac{t}{T} \right) \right\} = \text{konstanta}$$

Konstantu získáme například dosazením času $t = 0$, poté vyjádříme I :

$$\left\{ LI + \pi a^2 B_0 \left(1 - \frac{t}{T} \right) \right\} = \pi a^2 B_0 \Rightarrow$$
$$I = \frac{\pi a^2 B_0}{L} \frac{t}{T}, \text{ pro } 0 < t < T$$

Prohlédněte si videa se smyčkou v poli: **snížující se pole**, **rotující smyčka**, **zmenšující se smyčka**. Všimněte si, že jelikož tok se nemůže změnit, dokud je odpor cívky nulový, siločivky nemohou projít za hranici smyčky při zeslabování vnějšího pole. Jinak řečeno, siločivky jsou zachyceny smyčkou.

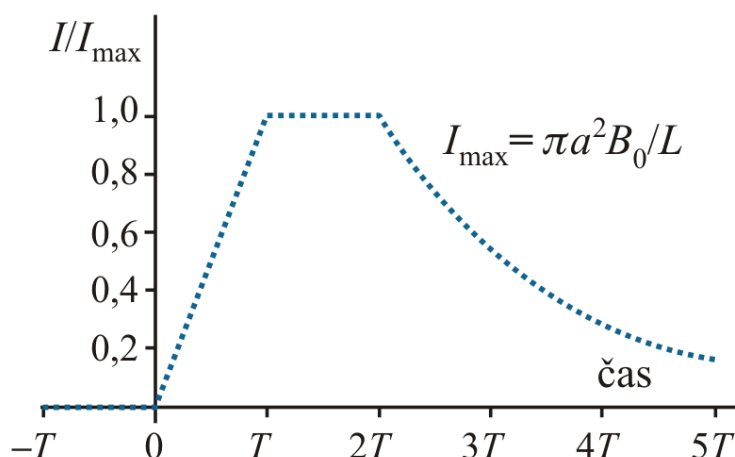
- (c) Tok se během tohoto intervalu nemění, a tudíž zůstává proud roven $\pi a^2 B_0 / L$.
- (d) Výsledek je

$$I(t) = \frac{\pi a^2 B_0}{L} e^{-(t-2T)/\tau} = \frac{\pi a^2 B_0}{L} e^{-(t-2T)/2T} \text{ pro } t > 2T.$$

- (e) Energie nakumulovaná ve smyčce je rozptýlena díky ohmickému ohřevu. Vynásobme rovnici $IR = -L dI/dt$ proudem

$$L \frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} LI^2 \right] = -RI^2.$$

Vidíme, že rychlost, kterou se snižuje energie cívky, je rovna rychlosti ohmické disipace. Všimněte si na videu uvedeném výše, že jakmile se objeví konečný odpor smyčky, siločivky se začnou pohybovat směrem k prstenci, kde je rozptylována energie magnetického pole (siločivky se pohybují ve směru Poyntingova vektoru).



Ř Úloha 4: Vznícení automobilu

(a) Potřebujeme spočítat energii kondenzátoru:

$$U = \frac{1}{2}CV^2 \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{2\frac{U}{C}} \sim 3 \text{ kV}$$

Je zjevně velice snadné nabít se na toto napětí. Upřesním, že zápalná energie se mění v rozsahu od minimální hodnoty $100 \mu\text{J}$ do energie pravděpodobného zažehnutí zhruba $100\times$ vyšší.

(b) Z průrazné intenzity pole získáme, že půlcentimetrový oblouk vyžaduje 15 kV a chtěli bychom toto napětí z důvodu bezpečnosti snížit na $1,5 \text{ kV}$. Žena se vybíjí skrze podrážky (dvě paralelně zapojené) jejichž tloušťku odhadneme $\sim 1 \text{ cm}$, plochu $\sim 250 \text{ cm}^2$:

$$R = \rho L / 2A \approx 2 \times 10^{12} \Omega.$$

Časová konstanta vybíjení je $\tau = RC = 400 \text{ s}$. Na požadované snížení potřebujeme:

$$V(t) = V_0 e^{-t/\tau} \quad \Rightarrow \quad t = \tau \ln\left(\frac{V(t)}{V_0}\right) \approx 15 \text{ min.}$$

Není příliš rozumné ženu žádat, aby čtvrt hodiny vyčkala. Nezapomněli jsme na něco?

(c) Vzpomeneme si, že v úloze 5 sady 5 nám vyšlo, že pro kondenzátor libovolného tvaru je RC dáno rezistivitou a permitivitou (pro vzduch bereme relativní permitivitu 1). Ženu budeme považovat za kondenzátor

$$\tau = RC = \rho \varepsilon_r \varepsilon_0 \approx 400 \text{ s.}$$

Jelikož je výsledek srovnatelný s časem vybití skrze podrážky (bez ohledu na vzduch) toto upřesnění příliš neovlivní výsledek. Ale na něco jsme zapomněli! Při vystupování z auta se lidé obvykle dotknou kovu a tím se vybíjí. Podívejte se pozorně a zjistíte, že ona to neudělala.

(d) Najdeme potenciál a kapacitu automobilu.

Kapacitu můžeme odhadovat jako kapacitu koule o poloměru 2 m podle vztahu: $C = 4\pi\varepsilon_0 a \sim 200 \text{ pF}$, což se příliš neliší od kapacity člověka. Druhá možnost je se dívat na automobil jako deskový kondenzátor s plochou 6 m^2 vůči zemi vzdálené $0,25 \text{ m}$:

$C = \epsilon_0 A/d \sim 200$ pF. Nezávisle na způsobu výpočtu dostáváme tu samou kapacitu, což nám potvrzuje správnost odhadu.

Maximální hodnotu napětí odhadneme z průrazného napětí na kouli o poloměru 2 m: $V = Er \approx 6 \times 10^6$ V. Páni! To je vysoké napětí, možná je nadhodnocené, ale budeme s ním pracovat. Potřebujeme jej snížit na 100 V (nebo kilovolt, jestli si chcete trochu zariskovat, beztak výsledek se výsledek bude lišit jen dvakrát).

Vybíjíme automobil skrz gumové pneumatiky. Odhadneme je zhruba jako krychle se stranou 10 cm a kontaktní plochou ~ 100 cm² a tloušťkou 10 cm). Odpor jedné pneumatiky pak je $R = \rho L/A \approx 10^{14}$ Ω . Jsou-li zapojeny paralelně $R = \rho L/4A \approx 3 \times 10^{13}$ Ω .

To je mnohem horší než předchozí výsledek! Ted' $\tau \sim 6000$ s (hodina a půl) a musíme čekat téměř celý den, aby se auto vybilo. Určitě jsme ještě na něco zapomněli.

- (e) Řešením je pochopitelně zvýšení vodivosti pneumatik a tak se to i skutečně dělá. Porovnání podrážek a pneumatik nebylo korektní. Do pneumatik se přidává vodivá přísada, například amorfní uhlík (saze), což zvýší vodivost o 3 – 4 řády. Případně ještě více pro závodní auta. Proč ne pro všechny? Jde o kompromis mezi vodivostí a životností. Jiným řešením je táhnout za sebou řetěz nebo gumu s kovovými vlákny (což byste měli vidět u kamionů rozvázejících paliva, kde by jiskra znamenala katastrofu.

Ř Úloha 5: Defibrilátor

- (a) Je to energie. Výkon můžeme spočítat jako V^2/R a z něj energii vynásobením časem. Vezmeme dvě křivky a zjistíme, že jejich energie je zhruba stejná. Červenou křivku (50 Ω) považujeme v průměru za 1 100 V po dobu 7 ms a poté 500 V po dobu 5 ms. Šedou křivku (50 Ω) považujeme v průměru za 1 400 V po dobu 11 ms a poté 1 000 V po dobu 7 ms.

$$U_1 = \sum_{i=1}^2 \frac{V_{1,i}^2}{R_1} t_{1,i} \approx 195 \text{ J}$$

$$U_2 = \sum_{i=1}^2 \frac{V_{2,i}^2}{R_2} t_{2,i} \approx 190 \text{ J}$$

Tenhle odhad byl jen od oka, ale jistě jsou energie stejné. Podle zdroje jsou to křivky pro 200 J.

- (b) 50 Ω křivka klesne z 1 400 V do 1 000 V. (a poté z 700 V do 500 V) za 5 ms:

$$V(t) = V_0 e^{-t/\tau} \quad \Rightarrow \quad \frac{V(t)}{V(t+\Delta t)} = e^{\Delta t/\tau} \quad \Rightarrow$$

$$\tau = \frac{\Delta t}{\ln\left(\frac{V(t)}{V(t+\Delta t)}\right)} \approx 15 \text{ ms} \quad \Rightarrow \quad C = \tau/R \sim 0,3 \text{ mF}.$$

150 Ω křivka klesne z 1 700 V do 1 300 V za 10 ms: $\tau \approx 37$ ms a výsledně $C = \tau/R \sim 0,3$ mF. V obou případech můžeme situaci modelovat jako vybíjení 0,3 mF kondenzátoru.

- (c) Nespalte si zdroj! Potřebujete omezit proud tak, abyste neodebírali více než 500 W. Jelikož proud je nejvyšší na začátku nabíjení a v čase $t = 0$ $I = I_0 = \mathcal{E} / R$, najdeme R :

$$P_{\max} = I_0 \mathcal{E} = \mathcal{E}^2 / R \Rightarrow R = \mathcal{E}^2 / P_{\max} = 8 \text{ k}\Omega.$$

Můžeme použít větší odpor rezistoru, abychom omezili energii ještě víc, ale pak budeme nabíjet pomaleji, takže toto je nejlepší, co můžeme udělat (pokud ovšem nemáme zdroj, který je nastavený tak, aby se chránil sám).

- (d) Použijeme odpor z (c) a kapacitu z (b):

$$V(t) = V_{\max} \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \Rightarrow t = -RC \ln\left(1 - \frac{V(t)}{V_{\max}}\right) \approx 4 \text{ s}.$$