Legendreova transformace

Představme si situaci, ve které je veškerá informace o daném systému obsažena ve funkci

$$Y = Y(X)\,.$$

My bychom ale z jistých důvodů potřebovali, aby namísto proměnné X byl systém popsán pomocí

$$P \equiv \frac{\mathrm{d}Y(X)}{\mathrm{d}X}\,. \tag{1}$$

Jako první by nás mohlo napadnout zkusit z předchozí rovnice vyjádřit $X = X(P)$ a dosadit do původní funkce: $Y = Y(X(P))$. Tento krok ovšem není korektní, protože při něm ztratíme část informace. Demonstrujme si to na následujícím příkladu. Uvažujme funkci $Y(X)$ danou předpisem

$$Y(X) = \exp(X)\,. \tag{2}$$

Na základě definice (1) pak můžeme psát

$$P = \frac{\mathrm{d}Y(X)}{\mathrm{d}X} = \exp(X)\,,$$

což po dosazení do vztahu (2) vede na

$$Y(P) = P\,. \tag{3}$$

Co kdybychom se nyní chtěli vrátit zpátky k původnímu vyjádření funkce Y? Rovnost (3) lze za použití definice (1) přepsat do tvaru

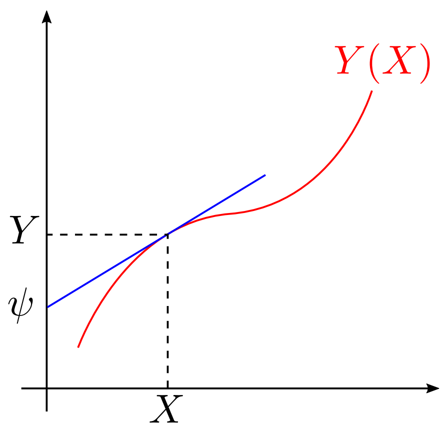
$$Y(X) = \frac{\mathrm{d}Y(X)}{\mathrm{d}X}\,.$$

Dostali jsme tak diferenciální rovnici, jejíž řešením je

$$Y(X) = \exp(X - C)\,,$$

což není původní funkce! (Jedná se o tvarově stejnou funkci, která je ovšem posunutá o libovolnou konstantu ve směru osy X.) Ztratili jsme tedy část informace. Naštěstí existuje způsob, jak nahradit původní funkci $Y = Y(X)$ jinou funkcí $\psi = \psi(P)$, kdy k této ztrátě nedojde → **Legendreova transformace**.

Geometricky funguje Legendreova transformace takto: standardně křivku $Y = Y(X)$ chápeme jako množinu bodů $[X, Y(X)]$. Alternativně však můžeme tuto křivku vyjádřit i jako množinu tečen v každém jejím bodě (lze ukázat, že tento dualismus je jednoznačný). Každou z příslušných tečen lze pak rovněž vyjádřit jako dvojici $[P, \psi(P)]$, kde ψ je průsečík tečny s osou Y a P je její směrnice (v souladu s definicí (1)), viz Obr. 1.



Obrázek 1: Tečna ke grafu křivky $Y(X)$

Pro směrnici tečny můžeme psát

$$P = \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{Y - \psi}{X}\,,$$

odkud lze vyjádřit

$$\psi = Y - PX\,. \tag{4}$$

Taktovou funkci $\psi(P)$ budeme dále označovat jako Legendreův obraz $Y(X)$. Sepišme nyní postup, jak získat $\psi = \psi(P)$ ze znalosti $Y = Y(x)$.

1. Na začátku máme $Y = Y(X)$.
2. Z definice (1) vyjádříme $P = P(X)$ a vztah invertujeme $\rightarrow X = X(P)$.
3. Dle rovnice (4) pak dostaneme $\psi(P) = Y(X(P)) - PX(P)$.

Vraťme se nyní k našemu původnímu příkladu, kdy $Y(X) = \exp(X)$. Podle druhého kroku vyjádříme $P = \exp(X)$ a následně invertujeme na $X(P) = \ln(P)$. Na základě kroku třetího pak můžeme zapsat funkci $\psi(P)$ ve tvaru

$$\psi(P) = P(1 - \ln(P)).$$

V další části textu ukážemne, jak lze ze znalosti funkce $\psi(P)$ zrekonstruovat původní funkci $Y(X)$. Nejprve poznamenejme, že podle vztahu (1) můžeme vyjádřit

$$\mathrm{d}Y = P\mathrm{d}X. \tag{5}$$

Diferencováním vztahu (4) pak dostaneme

$$\mathrm{d}\psi = \mathrm{d}Y - P\mathrm{d}X - X\mathrm{d}P = -X\mathrm{d}P,$$

kde ve druhém kroku jsme využili rovnosti (5). Můžeme tedy psát

$$-X = \frac{\mathrm{d}\psi(P)}{\mathrm{d}P}. \tag{6}$$

Pro zpětné zrekonstruování funkce $Y(X)$ vyjdeme opět z rovnice (4), kterou přepíšeme do následujícího tvaru:

$$Y = \psi + PX. \tag{7}$$

Sepišme nyní opět postup, jak provést inverzní Legendreovu transformaci.

1. Vyjdeme ze znalosti $\psi = \psi(P)$.
2. Z rovnosti (6) vyjádříme $X = X(P)$ a vztah invertujeme $\rightarrow P = P(X)$.
3. Dle rovnice (7) pak dostaneme $Y(X) = \psi(P(X)) + P(X)X$.

Vraťme se naposledy k předchozímu příkladu, kdy jsme vyjádřili $\psi(P) = P(1-\ln(P))$. Na základě druhého kroku vyjádříme

$$-X = \frac{\mathrm{d}\psi(P)}{\mathrm{d}P} = -\ln(P) \quad \rightarrow \quad P = \exp(X).$$

Za použítí třetího kroku pak dostaneme

$$Y(X) = \exp(X)(1 - X) + \exp(X)X = \exp(X),$$

což je přesně původní tvar funkce $Y(X)$.

Sepišme nyní získané poznatky přehledně do následující tabulky:

Legendreova transformace	Inverzní Legendreova transformace
$Y = Y(X)$	$\psi = \psi(P)$
$P(X) = \frac{\mathrm{d}Y(X)}{\mathrm{d}X} \rightarrow X = X(P)$	$-X(P) = \frac{\mathrm{d}\psi(P)}{\mathrm{d}P} \rightarrow P = P(X)$
$\psi(P) = Y(X(P)) - PX(P)$	$Y(X) = \psi(P(X)) + P(X)X$

Tabulka 1: Legendreova transformace funkce jedné proměnné.

Legendreovu transformaci lze pak snadno zobecnit pro funkce více proměnných. Proces je přehledně sepsán v následující tabulce:

Legendreova transformace	Inverzní Legendreova transformace
$Y = Y(X_1, \ldots, X_n)$	$\psi = \psi(P_1, \ldots, P_n)$
$P_k(X_1, \ldots, X_n) = \frac{\partial Y}{\partial X_k} \to X_k = X_k(P_1, \ldots, P_n)$	$-X_k(P_1, \ldots, P_n) = \frac{\partial \psi}{\partial P_k} \to P_k = P_k(X_1, \ldots, X_n)$
$\psi(P_1, \ldots, P_n) = Y - \sum\limits_{k=1}^{n} P_k X_k$	$Y(X_1, \ldots, X_n) = \psi + \sum\limits_{k=1}^{n} P_k X_k$

Tabulka 2: Legendreova transformace funkce více proměnných.

Poznamenejme, že Legendreovu transformaci v případě funkce více proměnných nemusíme nutně použít na všechny $X_1, \ldots, X_n$, ale na libovolnou podmnožinu z nich.

Přesuňme se nyní do problematiky analytické mechaniky, kde je veškerá informace o systému obsažena v Lagrangeově funkci

$$L = L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)\,.$$

Z mnoha teoretických i praktických důvodů však preferujeme, aby byla funkce popisující námi studovaný systém vyjádřena pomocí zobecněných souřadnic a jim příslušících zobecněných hybností

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\,.$$

Za tímto účelem využijeme Legendreovu transformaci. Z předchozího vztahu máme

$$p_k = p_k(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)\,.$$

Tento vztah dále invertujeme

$$\dot{q}_k = \dot{q}_k(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t)\,.$$

Nakonec pak vyjádříme Legendreův obraz L jako

$$-H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t) = L - \sum_{k=1}^{n} p_k \dot{q}_k\,,$$

kde funkci H nazýváme Hamiltonova funkce (hamiltonián). Důvod, proč jsme na levé straně zvolili znaménko $-$ je ten, že po převedení do tvaru

$$H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t) = \sum_{k=1}^{n} p_k \dot{q}_k - L$$

ihned vidíme, že Hamiltonova funkce reprezentuje celkovou energii systému vyjádřenou pomocí zobecněných souřadnic a jim příslušících zobecněných hybností.

Zaměřme se nyní na nalezení pohybových rovnic ze znalosti Hamiltonovy funkce. Pro účely následujícího odvození využijeme sumační konvenci, kdy přes každý index vyskytující se v daném členu právě dvakrát se automaticky sčítá. Hamiltonovu funkci pak můžeme zapsat ve tvaru

$$H(q, p, t) = p_k \dot{q}_k - L\,,$$

kde $q \equiv \{q_k\}_{k=1}^{n}$ a $p \equiv \{p_k\}_{k=1}^{n}$. Vyjádřeme nyní diferenciál $\mathrm{d}H$ jako

$$\begin{aligned} \mathrm{d}H = \mathrm{d}(p_k \dot{q}_k - L) &= \dot{q}_k \mathrm{d}p_k + p_k \mathrm{d}\dot{q}_k - \mathrm{d}L \\ &= \dot{q}_k \mathrm{d}p_k + p_k \mathrm{d}\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\mathrm{d}\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \\ &= -\dot{p}_k \mathrm{d}q_k + \dot{q}_k \mathrm{d}p_k - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t\,, \end{aligned} \tag{8}$$

kde jsme při přechodu od druhého řádku ke třetímu dosadili z Lagrangeových rovnic. Dále vyjádříme obecně diferenciál Hamiltonovy funkce jako

$$\mathrm{d}H(q, p, t) = \frac{\partial H}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k + \frac{\partial H}{\partial p_k}\mathrm{d}p_k + \frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t\,, \tag{9}$$

Porovnáním prvních dvou členů (8) a (9) pak dostaneme tzv. Hamiltonovy kanonické rovnice

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}\,, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}\,,$$

které jednoznačně udávají časový vývoj studovaného (mechanického) systému.