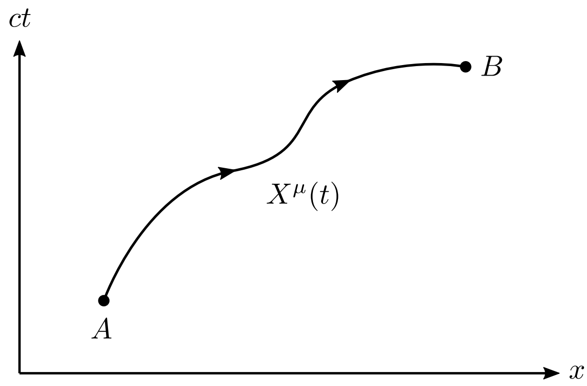
Speciální Teorie Relativity - Lagrangeův a Hamiltonův popis

Zabývejme se nalezením Lagrangeovy funkce pro volnou částici o hmotnosti m v (1+1)D případě. Trajektorii částice v prostoročase (světočáru) zapíšeme jako

$$X^\mu(t) = \begin{pmatrix} ct \\ x(t) \end{pmatrix},$$

viz Obr. 1.



Obrázek 1: Světočára částice

Podle Hamiltonova principu hledáme akci $S\left[X^\mu(t)\right]$, která pro realizovanou světočáru nabývá extrému. Aby byl takovýto popis kompatibilní se speciální teorií relativity, je potřeba, aby akce byla invariantní vůči Lorentzově transformaci. Ukážeme, že vhodným parametrem charakterizujícím každou světočáru je čas, který uběhne na hodinách pohybujících se spolu s uvažovanou částicí (vlastní čas). Za tímto účelem rozložíme $X^\mu(t)$ na infinitezimální úseky

$$\mathrm{d}X^\mu(t) = \begin{pmatrix} c\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\,\mathrm{d}t \\ v\,\mathrm{d}t \end{pmatrix}.$$

Vlastní čas $\mathrm{d}\tau$ pro každý takový úsek lze vyjádřit jako

$$\mathrm{d}\tau = \sqrt{-\frac{1}{c^2}\,\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}X^\mu\mathrm{d}X^\nu} = \sqrt{-\frac{\mathrm{d}s^2}{c^2}} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\mathrm{d}t\,.$$

Celkový vlastní čas mezi body A a B pak získáme následovně:

$$\Delta\tau = \int\limits_{X^\mu(t)} \mathrm{d}\tau = \int\limits_{t_A}^{t_B} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\mathrm{d}t\,.$$

Předpokládejme nyní, že hledaná akce je přímo úměrná $\Delta\tau$, tedy

$$S = \alpha\Delta\tau = \int\limits_{t_A}^{t_B} \alpha\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\mathrm{d}t\,.$$

Z předchozího vztahu snadno vyjádříme Lagrangeovu funkci jako

$$L(v) = \alpha\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,.$$

Abychom určili konstantu α, určíme nejprve hybnost částice

$$p = \frac{\partial L}{\partial v} = -\alpha\gamma\frac{v}{c^2}\,, \tag{1}$$

a následně spočítáme celkovou energii

$$E = pv - L = -\alpha\gamma\frac{v^2}{c^2} - \alpha\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{2}$$

V limitě malých rychlostí

$$\varepsilon \equiv \frac{v^2}{c^2} \ll 1$$

můžeme aproximovat

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2}\,, \quad \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{v^2}{2c^2}\,.$$

Dosazením do vztahu (2) pak dostáváme

$$E \approx -\alpha - \alpha\frac{v^2}{2c^2}\,,$$

kde jsme zanedbali člen řádu ε^2. Aby tato aproximace byla v souladu s Newtonovskou mechanikou, zvolíme

$$\alpha = -mc^2\,.$$

Pro celkovou energii pak můžeme psát

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2\,,$$

což je (až na konstantu) klasické vyjádření kinetické energie. Korektní vyjádření Lagrangeovy funkce pro volnou částici z pohledu STR je tedy

$$L(v) = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,.$$

Vztahy pro hybnost (1) a celkovou energii (2) lze pak přepsat do tvaru

$$p = \gamma mv\,, \quad E = \gamma mc^2\,. \tag{3}$$

V případě, kdy má částice (v dané inerciální vztažné soustavě) nulovou rychlost, lze její celkovou energii vyjádřit jako

$$E_0 = mc^2\,.$$

Jedná se o zcela klíčový vztah představující ekvivalenci mezi hmotností a tzv. klidovou energií, který poprvé publikoval Albert Einstein v roce 1905.

Zabývejme se dále nalezením Hamiltonovy funkce, tedy celkové energie částice vyjádřené pomocí hybnosti. Za použití vztahů (3) můžeme zapsat "čtyřvektor" hybnosti (stále pro (1+1)D) jako

$$P^\mu = mU^\mu \begin{pmatrix}\gamma mc \\ \gamma mv\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E/c \\ p\end{pmatrix}.$$

Dále určíme

$$P_\mu P^\mu = -\frac{E^2}{c^2} + p^2\,.$$

Současně však musí platit

$$P_\mu P^\mu = m^2 U_\mu U^\mu = -m^2c^2\,.$$

Kombinací předchozích dvou rovností dostáváme

$$H = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}\,,$$

kde $H \equiv E(p)$. Ze znalosti Hamiltonovy funkce můžeme dále vyjádřit

$$v(p) = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{pc^2}{\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}}\,.$$

V případě částice s nulovou hmotností ($m = 0$; např. foton) platí $v = c$. Dále spočítáme limitu

$$\lim_{p\to\infty} v(p) = \lim_{p\to\infty} \frac{pc^2}{\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}} = c\,.$$

Odtud vidíme, že rychlost každé částice je shora omezena rychlostí světla.

Uvažujme nyní, že se částice nachází v potenciálním poli $V(x)$. V takovém případě lze Lagrangeovu funkci vyjádřit jako

$$L(x,v) = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - V(x)\,,$$

čemuž odpovídá Hamiltonova funkce ve tvaru

$$H(x,p) = \sqrt{p^2c^2+m^2c^4} + V(x)\,.$$

Oba přístupy pak vedou na pohybovou rovnici typu

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = f\,,$$

kde

$$f = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$$

koresponduje s vyjádřením čtyřvektoru síly

$$F^\mu = \begin{pmatrix} \gamma\frac{fv}{c} \\ \gamma f \end{pmatrix}\,.$$