Fyzika I. KME 1 – 1. paralelka, přednášející Ilona Ali Bláhová

22. Obecné vlastnosti pohybu v centrálním silovém poli. Vzájemný pohyb dvou těles (bude probráno na laboratorních cvičeních).

1 Obecné vlastnosti pohybu v centrálním silovém poli

Pro sílu lze psát

$$\mathbf{F} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{1}$$

kde $f(r)$ je funkcí vzdálenosti. Moment hybnosti vzhledem ke středu centrální síly

$$\mathbf{b} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \tag{2}$$

Moment síly vyjádříme jako

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times f(r)\frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{0} \tag{3}$$

Víme, že platí

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{M} \tag{4}$$

Z toho vyplývá

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{0} \tag{5}$$

a tedy musí platit, že vektor momentu hybnosti je konstantní (je konstantní jeho velikost i směr) a můžeme tedy psát

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 \tag{6}$$

Pokud dále víme, že je moment hybnosti dán jako vektorový součin, pak víme, že je tento vektor kolmý k oběma vektorům figurujícím ve vektorovém součinu. Pokud víme, že jeho směr se nemění, pak z toho lze usuzovat, že pohyb daného hmotného bodu bude probíhat v rovině kolmé k tomuto vektoru. Pohyb v centrálním silovém poli je rovinný.

Dále je konstantní i jeho velikost, proto můžeme psát

$$\mid \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \mid = rmv\sin\alpha = b_0 \tag{7}$$

Víme, že velikost vektorového součinu udává obecně obsah plochy rovnoběžníku. Zavedeme tedy plošnou rychlost následujícím způsobem

$$v_p = \frac{rv\sin\alpha}{2} = \frac{b_0}{2m} \tag{8}$$

kde v_p udává velikost plochy opsané průvodičem pohybujícího se hmotného bodu za jednotku času. Plošná rychlost hmotného bodu pohybujícího se v centrálním silovém poli je konstantní.

2 Vzájemný pohyb dvou těles

Vyšetřování vzájemného pohybu dvou hmotných bodů lze převést na pohyb jednoho myšleného bodu o redukované hmotnosti m_r v poli centrální síly $\mathbf{F} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$, když síla jejich vzájemného působení závisí pouze na vzdálenosti vzdálenosti daných hmotných bodů a je udaná jako $r =\mid \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \mid$

hmotnosti a polohové vektory hmotných bodů jsou značeny popořadě m_1, m_2, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$

gravitační sílu, kterou působí první hmotný bod na druhý budeme značit $\mathbf{F}_{21}$ a gravitační sílu, kterou působí druhý hmotný bod na první budeme značit $\mathbf{F}_{12}$
setavíme pohybové rovnice

$$m_1 \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F}_{12} \tag{9}$$

$$m_2 \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F}_{21} \tag{10}$$

poloha hmotném středu této soustavy je určena

$$\mathbf{r}_S = \frac{\mathbf{r}_1 m_1 + \mathbf{r}_2 m_2}{m_1 + m_2} \tag{11}$$

dále lze odvodit

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = (\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2})\mathbf{F}_{21} \tag{12}$$

pokud máme zavedeno $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, pak můžeme psát

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = (\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2})\mathbf{F}_{21} \tag{13}$$

Zavedeme redukovanou hmotnost myšleného bodu

$$\frac{1}{m_r} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \Rightarrow m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{14}$$

Odtud pak

$$m_r \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F}_{21} \tag{15}$$

Tím jsme problém dvou hmotných bodů (těles) převedli na problém jednoho hmotného bodu (tělesa) v poli centrální síly.
Pokud platí, že $m_2 \gg m_1$ pak pro redukovanou hmotnost platí $m_r \doteq m_1$ a polohový vektor $\mathbf{r} \doteq \mathbf{r}_1$