Fyzika I. KME 1 – 1. paralelka, přednášející Ilona Ali Bláhová

25. Keplerovy zákony, Keplerova úloha.

1 Keplerovy zákony

1. Keplerův zákon
Planety obíhají okolo Slunce po eliptických drahách málo odlišných od kružnice, v jejich společném ohnisku je Slunce.

2. Keplerův zákon
Plochy opsané průvodičem planety ve stejných dobách jsou stejné (plošná rychlost je konstantní).

$$v_p = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}r^2\omega = \frac{b_0}{2m} = konst. \tag{1}$$

3. Keplerův zákon
Druhé mocniny oběžných dob planet jsou v témže poměru jako třetí mocniny velkých poloos jejich drah.

$$\frac{{T_1}^2}{{T_2}^2} = \frac{{a_1}^3}{{a_2}^3} \tag{2}$$

2 Keplerove úloha

Vyšetřuje problém pohybu hmotného bodu o hmotnosti m v gravitačním poli hmotného bodu o hmotnosti M

$$\mathbf{F} = -\kappa Mm\frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{3}$$

Jednou možností je převést daný problém na řešení následující pohybové rovnice

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\kappa Mm\frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{4}$$

Druhou možností je sestavení vztahů pro celkovou mechanickou energii a moment hybnosti. Z předchozích úvah víme, že v tomto případě je moment hybnosti konstantní. Protože se jedná o centrální silové pole, víme, že je konzervativní. Celková mechanická energie bude tedy konstantní. Odtud dostáváme soustavu dvou rovnic, kterou je potřeba vyřešit

$$b_0 = rmv\sin\alpha \tag{5}$$

$$W_m = W_0 = \frac{1}{2}mv^2 - \kappa\frac{Mm}{r} \tag{6}$$

Tyto dvě rovnice přepíšeme v polárních souřadnicích

$$b_0 = mr^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \tag{7}$$

$$W_0 = \frac{1}{2}m[(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t})^2 + r^2(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t})^2] - \kappa\frac{Mm}{r} \tag{8}$$

Při řešení (které z důvodu jeho komplikovanosti nebudeme uvádět celé) hledáme pouze závislost parametrů r a φ nebo chcete–li přesněji závislost $r = r(\varphi)$. Následně dostáváme

$$\varphi = \arccos\frac{\frac{b_0}{r} - \frac{\alpha m}{b_0}}{(2mW_0 + \frac{\alpha^2 m^2}{b_0^2})^{\frac{1}{2}}} + k \tag{9}$$

kde bylo zavedeno $\alpha = \kappa Mm$. Po úpravě

$$\frac{b_0^2}{\alpha m r} = 1 + (\frac{2W_0 b_0^2}{\alpha^2 m} + 1)^{\frac{1}{2}}\cos(\varphi - k) \tag{10}$$

Dále zavedeme $p = \frac{b_0^2}{\alpha m}$ a $\varepsilon = (1 + \frac{2W_0 b_0^2}{\alpha^2 m})^{\frac{1}{2}}$. Řešení je pak možné napsat v následujícím tvaru

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon\cos(\varphi - k) \tag{11}$$

a dále

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos(\varphi - k)} \tag{12}$$

Obě poslední rovnice představují rovnice kuželosečky v polárních souřadnicích.
Pro elipsu a hyperbolu je $p = \frac{b^2}{a}$, kde a značí hlavní poloosu, b vedlejší poloosu. Dále $\varepsilon = \frac{e}{a}$ je takzvaná numerická excentricita, e je excentricita dané kuželosečky. Pro parabolu je p ve významu vzdálenosti ohniska od řídící přímky.

Diskuze řešení:
$\varepsilon < 1 \Rightarrow W_0 < 0$ elipsa
$\varepsilon = 1 \Rightarrow W_0 = 0$ parabola
$\varepsilon > 1 \Rightarrow W_0 > 0$ hyperbola

Představa:
M – Slunce, m – planeta
$W_0 < 0$ dráha planety je eliptická – 1. Keplerův zákon

2.1 Odvození 3. Keplerova zákona

Poloosy dané elipsy lze vyjádřit

$$a = -\frac{\alpha}{2W_0}, \quad b = \frac{b_0}{(2 \mid W_0 \mid m)^{\frac{1}{2}}} \tag{13}$$

Nechť T značí dobu oběhu po dané eliptické trajektorii. Víme, že plocha elipsy se dá obecně vyjádřit jako $S = \pi ab$. Velikost této plochy můžeme též vyjádřit pomocí plošné rychlosti.

$$Tv_p = \pi ab \tag{14}$$

Dále dosadíme $v_p = \frac{b_0}{2m}$ a $\alpha = \kappa Mm$ a upravíme na vztah

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\kappa M} \tag{15}$$

Pro libovolnou planetu tedy platí, že výraz $\frac{T^2}{a^3}$ je konstantní – odtud již přímo znění 3.Keplerova zákona.