Fyzika I. KME 1 – 1. paralelka, přednášející Ilona Ali Bláhová

27. Mechanické kmitání soustavy, lineární harmonický oscilátor – pohybová rovnice a její řešení. Energetická bilance.

1 Mechanické kmitání soustavy

Situace: těleso připevněné k pružině, která je upevněná k boční pevné stěně, těleso se pohybuje ve vodorovném směru bez tření, zvolený směr pohybu např. ve směru souřadnicové osy x.
Pokud je těleso vychýleno z rovnovážné polohy, pak na něj působí síla F

$$F = -k\,x \tag{1}$$

kde k je tuhost pružiny, $[k] = \mathrm{N.m^{-1}}$.
Sestavme pohybovou rovnici (na základě 2.NZ)

$$m\,a = -k\,x \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{3}$$

Zaveďme $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, pak rovnici můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0 \tag{4}$$

2 Lineární harmonický oscilátor – pohybová rovnice a její řešení

Pro obecné řešení výše uvedené rovnice zaveďme obecně $u = u(t)$ jako výchylku z rovnovážné polohy, která bude záviset na čase. Úkolem je při řešení dané diferenciální rovnice tuto závislost nalézt.

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\,u = 0 \tag{5}$$

Jedná se o homogenní diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Je nutno nejprve nalézt kořeny charakteristického polynomu.

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \tag{6}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\mathrm{j}\,\omega_0 \tag{7}$$

Hledané řešení lze pak napsat ve tvaru

$$u(t) = C_1 e^{\mathrm{j}\,\omega_0 \mathrm{t}} + C_2 e^{-\mathrm{j}\,\omega_0 \mathrm{t}} \tag{8}$$

což se dá po úpravě zapsat jako

$$u(t) = u_0 \sin(\omega_0 t + \psi) \tag{9}$$

u_0 je amplituda harmonických kmitů, ω_0 je úhlová rychlost a ψ je fázová konstanta.
Rychlost a zrychlení kmitajícího hmotného budu (tělesa) určíme na základě následujících vztahů:

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = u_0\,\omega_0 \cos(\omega_0 t + \psi) \tag{10}$$

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} = -u_0\,\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \psi) \tag{11}$$

3 Energetická bilance

$$W_k = \frac{1}{2} m\,v^2 = \frac{1}{2}\,m\,u_0^2\,\omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \psi) \tag{12}$$

$$W_p = \int_0^u -F\mathrm{d}\tilde{u} = \int_0^u k\,\tilde{u}\,\mathrm{d}\tilde{u} = \frac{1}{2}\,k\,u^2 = \frac{1}{2}\,k\,u_0^2\,\sin^2(\omega_0 t + \psi) \tag{13}$$

$$W_m = W_k + W_p = \frac{1}{2}\,m\,u_0^2\,\omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \psi) + \frac{1}{2}\,k\,u_0^2\,\sin^2(\omega_0 t + \psi) = \frac{1}{2}\,m\,u_0^2\,\omega_0^2 = \frac{1}{2}\,k\,u_0^2 \tag{14}$$