Fyzika I. KME 1 – 1. paralelka, přednášející Ilona Ali Bláhová

28. Tlumený oscilátor – pohybová rovnice a její řešení, útlum.

1 Tlumený oscilátor – pohybová rovnice a její řešení

V reálných kmitajících soustavách dochází vždy k energetickým ztrátám. Předpokládejme, že pro mechanický oscilátor je síla tření je přímo úměrná velikosti rychlosti. Sestavme pohybovou rovnici (na základě 2.NZ)

$$m\,a = -k\,x - b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

kde b je konstantou přímé úměrnosti $F_t = b\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.
Tuto rovnici upravíme na tvar

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{b}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{2}$$

Zaveďme opět $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ a dále $\frac{b}{m} = 2\delta$. Přepišme ještě danou rovnici obecně pro $u = u(t)$ (jako výchylku z rovnovážné polohy, která bude záviset na čase).

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2\delta\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0 \tag{3}$$

Jedná se opět o homogenní diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Je nutno nejprve nalézt kořeny charakteristického polynomu.

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{4}$$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \tag{5}$$

Nyní je nutno diskutovat tři různé případy:

1) $\delta > \omega_0$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \Delta,\ \ \Delta^2 = \delta^2 - \omega_0^2 \tag{6}$$

Hledané řešení lze pak napsat ve tvaru

$$u(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \tag{7}$$

což se dá po úpravě zapsat jako

$$u(t) = e^{-\delta t}(C_1 e^{\Delta t} + C_2 e^{-\Delta t}) \tag{8}$$

a dále

$$u(t) = C_0\, e^{-\delta t} \sinh(\Delta t + \psi) \tag{9}$$

Jedná se o pohyb přetlumený - aperiodický. Pro $t \to 0$ se výchylka $u \to 0$. Pokud platí $\frac{C_2}{C_1}t < -1$ pak dojde k jedinému překmitnutí rovnovážné polohy a pak platí opět pro $t \to 0$ se $u \to 0$.

2) $\delta = \omega_0$

Pak charakteristický polynom má jeden dvounásobný kořen

$$\lambda_{1,2} = -\delta \tag{10}$$

$$u(t) = e^{-\delta t}(C_1 + C_2 t) \tag{11}$$

Jedná se o kritický případ tlumení. Pro $t \to 0$ se výchylka $u \to 0$, v tomto případě je rovnovážná poloha dosažena nejrychlejším možným způsobem.

3) $\delta < \omega_0$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \mathrm{j}\omega, \;\; \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \tag{12}$$

$$u(t) = e^{-\delta t}(C_1 e^{\mathrm{j}\omega t} + C_2 e^{-\mathrm{j}\omega t}) \tag{13}$$

$$u(t) = C_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \psi) \tag{14}$$

Což lze interpretovat jako řešení netlumeného oscilátoru, kde amplituda exponenciálně klesá s časem. Z matematického hlediska řešení není periodické, protože $f(t) \neq f(t+T)$. Řešení ovšem vykazuje jisté "periodické" vlastnosti. Položme pro jednoduchost $\psi = 0$.
a) Průchod rovnovážnou polohou pro $t_{RP} = 2k\frac{T}{4}$ pro $k \in N$
b) Dotykové body funkce obálky $\tilde{u} = C_0 e^{-\delta t}$ s funkcí $u(t)$ pro $t_{DT} = (2k+1)\frac{T}{4}$ pro $k \in N$
c) Extrémy výchylky (nulová rychlost) pro $t_{EXT} = (2k + \frac{2\alpha}{2\pi})\frac{T}{4}$ pro $k \in N$, kde $\alpha = \mathrm{arctg}(\frac{\omega}{\delta})$

2 Útlum

Mírou tlumení je poměr velikostí výchylek ve dvou časových okamžicích vzdálených o periodu T.

$$\frac{u(t)}{u(t+T)} = \frac{u(t) = C_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \psi)}{u(t) = C_0 e^{-\delta(t+T)} \sin(\omega(t+T) + \psi)} \tag{15}$$

$$\frac{u(t)}{u(t+T)} = e^{\delta T} = \beta \tag{16}$$

kde β značí útlum a dále

$$\Lambda = \ln \beta = \delta T \tag{17}$$

kde Λ je logaritmický dekrement.