Fyzika I. KME 1 – 1. paralelka, přednášející Ilona Ali Bláhová

29. Vynucené kmitání, rezonance amplitudy, rezonance výkonu.

1 Vynucené kmitání

Předpokládejme dále, že daný oscilátor budu buzen periodicky proměnnou silou $F(t) = F_0 \sin \Omega t$, kde F_0 je amplituda a Ω je úhlová rychlost budící síly. Sestavme pohybovou rovnici (na základě 2.NZ)

$$m\,a = -k\,x - b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + F_0 \sin \Omega t \tag{1}$$

Tuto rovnici upravíme na tvar

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + 2\delta\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = a_0 \sin \Omega t \tag{2}$$

kde $a_0 = \frac{F_0}{m}$. Jedná se o nehomogenní diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou. Celkové řešení získáme jako součet řešení odpovídající homogenní rovnice (již bylo řešeno) a řešení pravé strany

$$u = u_H + u_p \tag{3}$$

Řešení dané pravé strany lze napsat ve tvaru

$$u_p = \alpha \sin \Omega t + \beta \cos \Omega t \tag{4}$$

kde při řešení získáme následující vztahy

$$\alpha = -\frac{2\delta\Omega a_0}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2},\ \beta = -\frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)\,a_0}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2} \tag{5}$$

Dále se dá řešení dané pravé strany upravit na tvar

$$u_p = K \sin(\Omega t + \psi) \tag{6}$$

kde

$$K^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \frac{a_0^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2},\ \mathrm{tg}\psi = \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \tag{7}$$

Řešení příslušné homogenní rovnice lze po určité době zanedbat (výchylka se blíží k nule), dojde k ustálení netlumeného harmonického kmitání s frekvencí Ω.

2 Rezonance amplitudy

Hledáme maximum pro amplitudu, při řešení bychom položili $\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}\Omega} = 0$ a hledali bod podezřelý z lokálního extrému. Následně bychom získali maximum amplitudy pro rezonanční frekvenci Ω_r

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2},\ \text{pro } (\omega_0^2 - 2\delta^2) \geq 0 \tag{8}$$

3 Rezonance výkonu

Okamžitý výkon dodaný vnější silou

$$P = F.v = ma_0 \sin \Omega t(-\alpha\Omega \sin \Omega t + \beta\Omega \cos \Omega t) \tag{9}$$

Odtud získáme střední výkon za jednu periodu jako

$$\overline{P} = \frac{\int_0^T P \mathrm{d}t}{T} = \frac{ma_0}{T} \int_0^T (-\alpha\Omega \sin^2 \Omega t + \beta\Omega \sin \Omega t \cos \Omega t)\mathrm{d}t \tag{10}$$

odtud

$$\overline{P} = -\frac{1}{2}\, m\, a_0\, \alpha\, \Omega = ma_0^2 \frac{\delta\Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2} \tag{11}$$

Maximum výkonu nastává pro

$$\Omega_r = \omega_0 \tag{12}$$

a tedy nezávisí na velikosti tlumení δ.
Zaveďme činitel jakosti Q jako 2π násobek poměru energie akumulované v systému $\overline{W}$ k energii $\Delta_T W$ rozptýlené tlumící silou během jedné periody T

$$Q = 2\pi \frac{\overline{W}}{\Delta_T W} = \frac{\omega_0}{2\delta} \tag{13}$$