

6. Rozklad zrychlení na složky, odvození tečného a normálového zrychlení.

1 Rozklad zrychlení na složky

Jenotkový vektor ve směru zrychlení

$$\vec{\tau}_0 = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{v}}{v} \quad (1)$$

$$\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}_0 = v(t) \cdot \vec{\tau}_0(t) \quad (2)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v(t) \cdot \vec{\tau}_0(t))}{dt} = \frac{d(v(t))}{dt} \cdot \vec{\tau}_0(t) + v(t) \cdot \frac{d(\vec{\tau}_0(t))}{dt} \quad (3)$$

1.1 Tečná složka

Tečná složka zrychlení je potom rovna

$$\vec{a}_t = \frac{d(v(t))}{dt} \cdot \vec{\tau}_0(t) \quad (4)$$

1.2 Normálová složka

Normálová složka je rovna

$$\vec{a}_n = v(t) \cdot \frac{d(\vec{\tau}_0(t))}{dt} = \frac{v^2}{R} \nu_0(t) \quad (5)$$

Odvození normálové složky zrychlení na základě nahrazení malého úseku trajektorie částí kružnice

$$\frac{\Delta s}{R} = \frac{|\Delta \vec{\tau}_0|}{|\vec{\tau}_0|} \Big/ \frac{1}{\Delta t} \quad (6)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{|\Delta \vec{\tau}_0|}{\Delta t} \Big/ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \quad (7)$$

$$\frac{v}{R} = \left| \frac{d\vec{\tau}_0}{dt} \right| \quad (8)$$

Odtud lze vztah pro normálovou složku upravit na tvar

$$\vec{a}_n = v(t) \cdot \frac{d(\vec{\tau}_0(t))}{dt} = v(t) \cdot \frac{v}{R} \frac{\frac{d(\vec{\tau}_0(t))}{dt}}{\left| \frac{d(\vec{\tau}_0(t))}{dt} \right|} = \frac{v^2}{R} \nu_0(t) \quad (9)$$

příčemž vektor $\nu_0(t)$ byl zaveden jako

$$\nu_0(t) = \frac{\frac{d(\vec{\tau}_0(t))}{dt}}{\left| \frac{d(\vec{\tau}_0(t))}{dt} \right|} \quad (10)$$

Důkaz, že platí, že $\frac{d\vec{\tau}_0(t)}{dt} \perp \vec{\tau}_0(t)$

$$\vec{\tau}_0(t) \cdot \vec{\tau}_0(t) = 1 \quad \Big/ \cdot \frac{d}{dt} \quad (11)$$

$$\frac{d(\vec{\tau}_0(t))}{dt} \cdot \vec{\tau}_0(t) + \vec{\tau}_0(t) \cdot \frac{d(\vec{\tau}_0(t))}{dt} = 0 \quad (12)$$

$$2 \cdot \frac{d(\vec{\tau}_0(t))}{dt} \cdot \vec{\tau}_0(t) = 0 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{d(\vec{\tau}_0(t))}{dt} \perp \vec{\tau}_0(t) \quad (13)$$

Tečná a normálová složka zrychlení jsou vzájemně na sebe kolmé. Pro velikost celkového zrychlení můžeme podle Pythagorovy věty psát

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2} \quad (14)$$